Espansione in serie di Taylor e MacLaurin

Da **Ciaoidea**

Esiste un modo per far convergere dei dati sperimentali verso un'unica legge che li descrive ? o magari ancor meglio esiste un metodo per predire dei fenomeni fisici ?

Ecco un simpatico esperimento ideale che propongo per cominciare a concretizzare l'idea di un metodo di indagine euristica:

immagino una goccia d'acqua sospesa in aria che per semplicità indico con massa unitaria "1" ed immagino che ad un certo istante ci sia un urto tale da farle schizzare via una porzione di massa pari ad una quantità "x"

la quantità di massa che rimane dopo l'urto è quindi ovviamente: 1 - x

se decido quindi di rapportare la quantità di massa iniziale con la quantità di massa dopo l'urto ottengo un fattore di perdita di massa che mi indica intuitivamente la dispersione della massa nello spazio circostante e quindi l'intensità dell'urto stesso: in poche parole una "espansione".

$$\alpha = \frac{1}{1-x}$$

con 0 < x < 1

Rapportare la quantità di 1 ad una quantità inferiore ad 1 matematicamente restituisce una quantità più grande e quindi dimensionalmente più espansa rispetto ad 1. Ad esempio:

1 / 0.8 = 1,25

tuttavia nulla vieta di pensare che la particella d'acqua di massa 1 abbia in effetti una massa **fluttuante** $\pm x$ nella frazione infinitesima di tempo presa in considerazione prima dell'urto dovuta ad altri fenomeni non noti (magari per vaporizzazione, condensazione, micro-urti di particelle adiacenti ecc..ecc...)

Bene , in ogni caso, il rapporto alfa rimane invariante ed il suo significato non cambia in quanto la fluttuazione - x + x è complessivamente nulla :

$$\alpha = \frac{1-x+x}{1-x},$$

posso quindi scrivere che:

$$\alpha = \frac{1-x}{1-x} + \frac{x}{1-x},$$

$$\alpha = 1 + \frac{x}{1-x},$$

$$\alpha = 1 + x(\frac{1}{1-x}),$$

ma per la definizione iniziale del termine alfa posso scrivere

$$\alpha = 1 + x\alpha \ ,$$

ma in questo modo ottengo ricorsività del termine alfa ossia ottengo ricorsività sulla condizione d'urto, quindi posso scrivere in modo annidato:

$$\alpha = 1 + x(1 + x\alpha) \ ,$$

ossia

$$\alpha = 1 + x + x^2\alpha \ ,$$

Ottengo un frattale ossia un oggetto geometrico che si ripete nella sua struttura allo stesso modo su scale (o potenze) diverse: non cambia praticamente aspetto o significato anche se visto con una lente d'ingrandimento

scrivo quindi la progressione geometrica di urti in modo sempre più annidato:

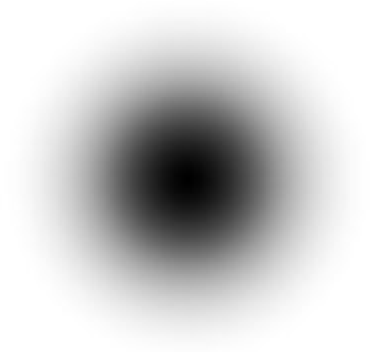
$$\alpha = 1 + x + x^2(1 + x + x^2\alpha) \ ,$$

$$\alpha = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4\alpha \ ,$$

e cosi via ...

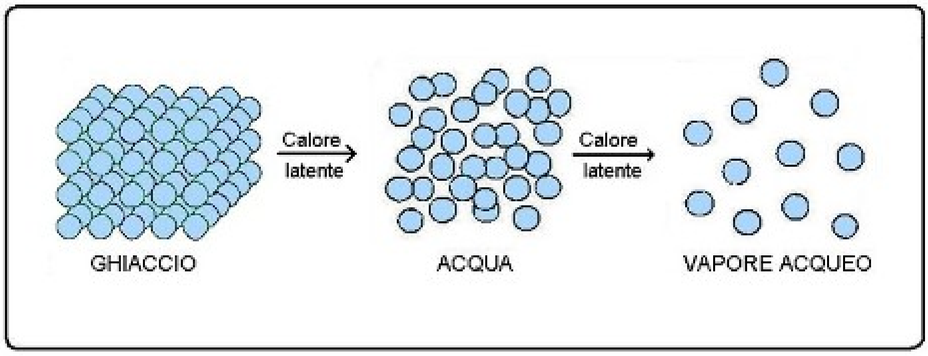
$$\alpha = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots \alpha x^n \ ,$$

ossia la funzione alfa che descrive l'urto corrisponde ad una serie di urti più piccoli che provocano nell'intorno della goccia fluttuazioni o perdite di massa sempre più piccole in scala n-esima.



Lo spazio intorno alla goccia potrebbe essere in effetti descritto con α come una distribuzione di massa e quindi di urti e di energia cinetica convergenti nel suo intorno a 1 ossia alla massa della goccia stessa.

La goccia assume contorni non ben definiti e "vaporosi", una piccola nube in **espansione** nello spazio: l'esperimento ideale sembra anticipare e dedurre concetti di teoria cinetica molecolare ...



Il miglior modo per studiare come rapidamente varia la massa della goccia nel suo intorno sarebbe quello di intraprendere quindi il calcolo della derivata sulla serie di potenze ottenute con lo studio della perdita di massa.

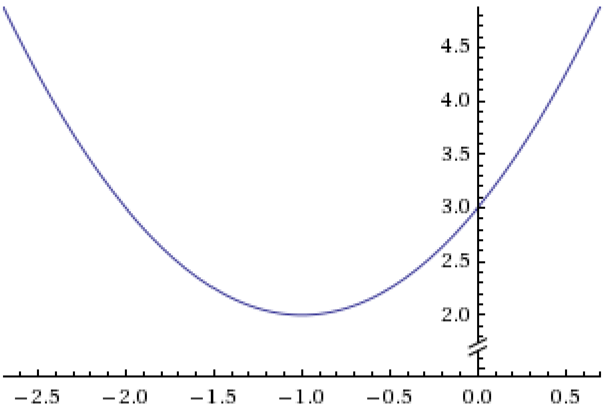
$$\frac{\partial}{\partial x}\alpha$$

Credo che si intuisca abbastanza facilmente in questo modo che qualsiasi funzione f(x) che descrive un fenomeno può facilmente ricondursi ad una serie di potenze: basta immaginarla con una infinità di coefficienti uguali a zero (fluttuazioni complessivamente nulle a vari livelli di scala).

Ad esempio la funzione:

$$f(x) = x^2 + 2x + 3$$

che analiticamente rappresenta nel piano la parabola



(x from −2.5 to 0.5)

può essere riscritta come serie di potenze

$$f(x) = 3 + 2x + 1x^2 + 0x^3 + 0x^4 + \cdots + 0x^n$$

quindi una funzione f(x) può essere scritta in forma generica come:

1) $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots + a_n x^n$

se questa è derivabile e continua, la derivata prima vale:

2) $f(x)' = 0 + a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots + na_n x^{n-1}$

la derivata seconda vale:

3) $f(x)'' = 0 + 0 + 2a_2 + 3{\cdot}2a_3x + 4{\cdot}3a_4x^2 + \ldots + n{\cdot}(n-1)a_nx^{n-2}$

la derivata terza:

4) $f(x)''' = 0 + 0 + 0 + 3{\cdot}2a_3 + 4{\cdot}3{\cdot}2a_4x + \ldots + n{\cdot}(n-1){\cdot}(n-2)a_nx^{n-3}$

la derivata quarta:

5) $f(x)'''' = 0 + 0 + 0 + 0 + 4{\cdot}3{\cdot}2a_4 + \ldots + n(n-1)(n-2)(n-3)a_nx^{n-4}$

la derivata n-esima:

6) $f(x)^{(n)} = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \ldots + n(n-1)(n-2)(n-3){\cdots}1a_n$

in particolare osservo che se x=0 le n-esime derivate nel punto P[0, f(0) > ossia nell'intorno zero risultano come segue:

dalla equazione 1) per n=0 $f(0) = a_0$

dalla equazione 2) per n=1 $f(0)' = a_1$

dalla equazione 3) per n=2 $f(0)'' = 2a_2$

dalla equazione 4) per n=3 $f(0)''' = 6a_3$

dalla equazione 5) per n=4 $f(0)'''' = 24a_4$

dalla equazione 6) per n generico $f(0)^{(n)} = n!a_n$

quindi in generale il coefficiente n-esimo può essere scritto come:

$$\frac{f(0)^{(n)}}{n!} = a_n$$

e l'equazione 1) può essere riscritta nella forma

7) $f(x) = f(0) + \frac{f(0)'}{1!}x + \frac{f(0)''}{2!}x^2 + \frac{f(0)'''}{3!}x^3 + \frac{f(0)''''}{4!}x^4 + \ldots + \frac{f(0)^{(n)}}{n!}x^n$

oppure in forma generale come:

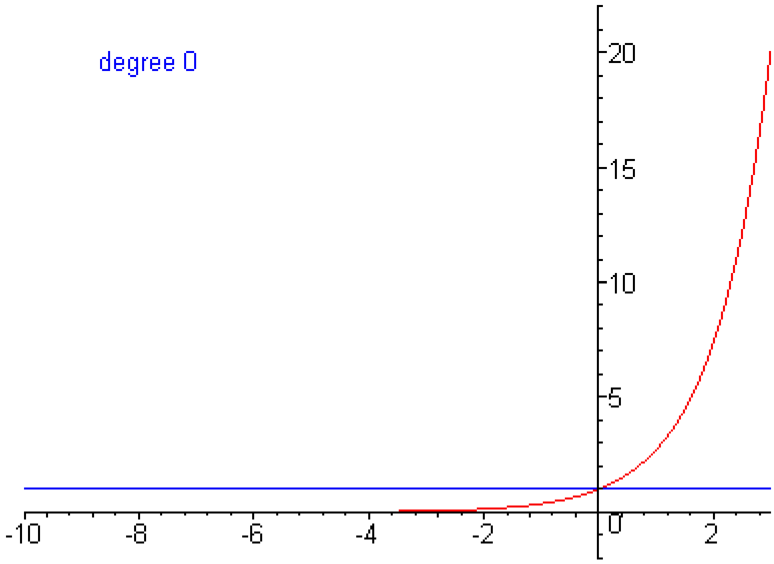
8) $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(0)^{(n)}}{n!}x^n$

l'equazione 8) è nota come **serie di MacLaurin**

La tangente alla curva nell'intorno di 0, infatti, ha valori sempre più simili a quelli della funzione man mano che ci si avvicina al punto di tangenza P ma non è tutto: se ci spinge in questo ragionamento e si deriva sempre di più nell'intorno di P si ottengono i punti della funzione stessa. Insomma è proprio un bel giochetto matematico: su questa approssimazione si scopre che studiando in un intorno definito di dati sempre di più gli effetti o le conseguenze derivanti $f^{(n)}(0)$ da un fenomeno fisico non noto f(x) su varie scale di osservazione (n) si può arrivare a dedurre la legge f(x) alla base degli effetti stessi.

Oppure conoscendo la legge è possibile con questo metodo predire anche tutta una serie di implicazioni(!)

Infatti ogni modello teorico che si rispetti è supportato da dati sperimentali, e per quanto esso sia la pura formalizzazione di regolarità osservate sperimentalmente, acquista notevole valore predittivo per eventi simili entro limiti ben definiti ossia in un intorno di valori osservabili !



L'equazione 8) può essere quindi scritta in forma generale in un intorno x_0 non necessariamente coincidente con l'origine come :

9) $$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(x_0)^{(n)}}{n!}(x - x_0)^n$$

questa è la **serie di Taylor**!

La somma di tutte le possibili conseguenze connesse localmente ad un fenomeno descrive in altre parole il fenomeno stesso.

Ecco quindi un esempio di come la serie di Taylor/Maclaurin è in grado di connettere e serializzare insieme 2 teorie: di seguito deduco la meccanica di Newton dalla meccanica relativistica di Einstein.

Negli appunti di introduzione alla teoria della relatività speciale Il fattore di Lorentz appare in varie equazioni della relatività speciale, come la dilatazione del tempo, la contrazione delle lunghezze e la formula della massa relativistica

10) $$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

essendo $\beta=v/c$

se calcolo ora a ritroso la derivata di gamma rispetto a β ottengo

11) $\gamma' = \dfrac{\beta}{(1-\beta^2)^{3/2}}$,

12) $\gamma'' = \dfrac{3\beta^2}{(1-\beta^2)^{5/2}} + \dfrac{\beta}{(1-\beta^2)^{3/2}}$,

13) $\gamma''' = \dfrac{9\beta^2}{(1-\beta^2)^{5/2}} + \dfrac{15\beta^3}{(1-\beta^2)^{7/2}}$,

14) $\gamma'''' = \dfrac{90\beta^2}{(1-\beta^2)^{7/2}} + \dfrac{9}{(1-\beta^2)^{5/2}} + \dfrac{105\beta^4}{(1-\beta^2)^{9/2}}$,

in particolare per una velocità v notevolmente bassa rispetto a quella della velocità luce c il rapporto v/c è quasi nullo quindi è possibile eseguire il calcolo delle n-derivate in un intorno β=0

segue:

dalla 10) $\gamma = 1$,

dalla 11) $\gamma' = 0$,

dalla 12) $\gamma'' = 1$,

dalla 13) $\gamma''' = 0$,

dalla 14) $\gamma'''' = \dfrac{9}{4!}\beta^4 = \dfrac{9}{24}\beta^4 = \dfrac{3}{8}\beta^4$,

l'espansione in serie di Taylor / MacLaurin della funzione gamma è quindi:

$$\gamma = \gamma(0) + \frac{\gamma(0)'\beta^1}{1!} + \frac{\gamma(0)''\beta^2}{2!} + \frac{\gamma(0)'''\beta^3}{3!} + \frac{\gamma(0)''''\beta^4}{4!} ,$$

$$\gamma = 1 + 0 + \frac{1}{2}\beta^2 + 0 + \frac{3}{8}\beta^4 + \cdots ,$$

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \cdots ,$$

approssimando al termine di secondo grado la funzione γ risulta:

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 ,$$

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} ,$$

ed essendo l'energia relativistica di una particella pari a :

$$E = mc^2$$,

la esprimo in funzione di γ e della massa a riposo m_0

$$E = m_0 c^2 \gamma$$,

$$E = m_0 c^2 (1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2})$$,

ossia risulta:

$$E = m_0 c^2 + \frac{m_0 v^2}{2}$$,

La versione troncata di questa serie permette di provare che la relatività speciale deduce la meccanica newtoniana per le basse velocità infatti il secondo termine nel secondo membro di quest'ultima equazione rappresenta proprio l'energia cinetica di un corpo nella dinamica di Isac Newton!

$$E_{cin} = \frac{1}{2} m_0 v^2$$,

Estratto da http://ciaoidea.it/alessandrorizzo/