Il tensore metrico

Da Ciaoidea.

Un oggetto fisicamente è inteso come un insieme di atomi ed è immaginabile matematicamente come una matrice di punti: se si considerano ad esempio 2 punti su un foglio di carta la loro distanza "lungo la superficie" risulterà intuitivamente sempre la stessa anche se curvo il foglio , così come rimarrà sempre la stessa se curvo l'intero libro,ossia la varietà geometrica, di cui esso fa parte. In pratica l'intervallo spaziale fra i suoi punti risulta invariante rispetto a questo tipo di trasformazione.

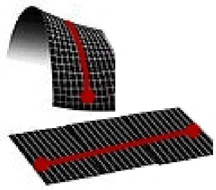


grafico 1)

Occorre quindi comprendere meglio il concetto di distanza in un oggetto o su una struttura curvabile sulla quale è possibile applicare una "tensione strutturale" senza per questo romperla.

L'intero universo è costellato di superfici curve, e anche quando tiriamo una linea dritta su un foglio con una squadra dobbiamo ricordarci che la superficie terrestre è curva e che lo spazio piano (o euclideo) considerato è valido solo in prima approssimazione localmente.

Considero quindi un punto P rispetto ad un altro punto di riferimento O, in uno spazio a due dimensioni, relazionandolo prima ad una metrica (cioè ad un sistema di misura) di tipo cartesiano, in cui gli assi di riferimento x,y sono perpendicolari fra loro , e poi relazionandolo ad una metrica non cartesiana in cui gli assi μ,ν sono generalmente obliqui.

Mi domando se sia possibile generalizzare con un'equazione la distanza del punto P da O utilizzando assi non necessariamente perpendicolari.

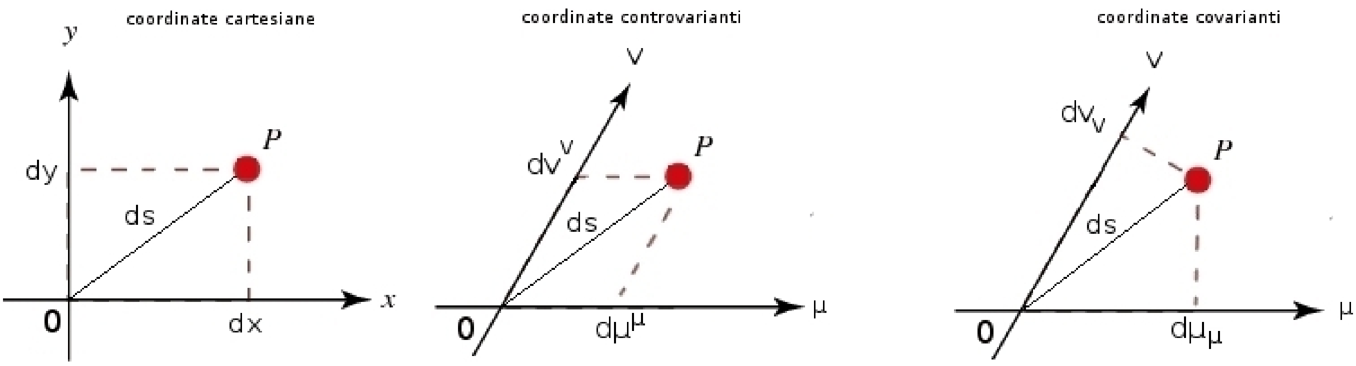


grafico 2)

Se dx e dy sono le coordinate cartesiane del punto P la distanza dall'origine ds è calcolata con il teorema di Pitagora attraverso la relazione:

1) $ds^2 = dx^2 + dy^2$

Ma se si cambia sistema di riferimento con assi obliqui come viene ricalcolata la distanza ds ?

Osservo che mano a mano che ruota l'asse v la distanza ds tra O e P rimane "invariante" mentre cambiano i valori delle coordinate dell'oggetto P rispetto al punto di osservazione.

Se nella rotazione dell'asse v la proiezione di P resta perpendicolare agli assi vuol dire che la direzione delle proiezioni tende a variare insieme alla rotazione stessa per questo il sistema di coordinate che si ottiene è detto co-variante (indicate con un indice basso)

Se nella rotazione dell'asse v le proiezioni di P variano rimanendo parallele nella direzione agli assi opposti (la proiezione su ν è parallela a μ e la proiezione su μ rimane parallela a ν) il sistema di coordinate viene definito contro-variante (indicate con un indice alto).

In particolare nel sistema di riferimento cartesiano le componenti covarianti coincidono con quelle controvarianti. Mi domando se posso quindi generalizzare il teorema di Pitagora con componenti generiche covarianti e controvarianti fra loro distinte.

In poche parole quale è la legge che permette di passare dalle componenti covarianti a quelle controvarianti e viceversa ?

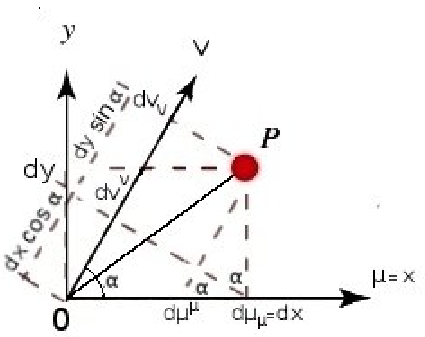


grafico 3)

sovrapponendo fra loro come in figura i diversi sistemi di riferimento cartesiani, covarianti e controvarianti per capirne geometricamente le relazioni ottengo che:

$$2)\begin{cases} dv^v = \frac{dy}{sin\alpha} \\ d\mu^\mu = dx - dv^v\ cos\alpha = dx - \frac{dy}{sin\alpha}\ cos\alpha = dx - \frac{dy}{tan\alpha} \end{cases}$$

quindi

$$3)\begin{cases} dx - \frac{dy}{tan\alpha} = d\mu^\mu \\ \frac{dy}{sin\alpha} = dv^v \end{cases}$$

ossia ragionando in termini di "vettori" devo applicare una trasformazione geometrica che mi fa passare da componenti di tipo cartesiano a componenti di tipo controvariante attraverso una matrice di trasformazione H: un pò come quando con i numeri si eseguono operazioni aritmetiche e si parte da dei numeri per ottenerne degli altri qui in ambito geometrico si parte da qualcosa di più generale cioè un insieme di numeri o scalari detti vettori per ottenerne degli altri

$$4)\ H\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\mu^\mu \\ dv^v \end{bmatrix}$$

essendo per la 3) H una matrice di trasformazione composta da 4 scalari:

$$5)\ H = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{tan\alpha} \\ 0 & \frac{1}{sin\alpha} \end{bmatrix}$$

in maniera del tutto analoga posso ottenere le seguenti relazioni geometriche per passare dalle coordinate cartesiane a quelle covarianti

$$6)\begin{cases} dx = d\mu_\mu \\ dx\ cos\alpha + dy\ sin\alpha = dv_v \end{cases}$$

ossia applico una matrice di trasformazione M per passare dalle coordinate cartesiane a quelle covarianti

$$7)\ M\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\mu_\mu \\ dv_v \end{bmatrix}$$

essendo

8) $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ cos\alpha & sin\alpha \end{bmatrix}$

Mi propongo ora di trovare una relazione tra le coordinate controvarianti e quelle covarianti. Geometricamente dal grafico 3) ottengo le seguenti relazioni:

9) $\begin{cases} d\mu_\mu - d\mu^\mu = dv^v\ cos\alpha \\ dv_v - dv^v = d\mu^\mu\ cos\alpha \end{cases}$

quindi:

10) $\begin{cases} d\mu^\mu + dv^v\ cos\alpha = d\mu_\mu \\ d\mu^\mu\ cos\alpha + dv^v = dv_v \end{cases}$

ossia devo applicare una matrice di trasformazione covariante $g_{\mu v}$ per passare da un vettore con componenti di tipo controvariante a componenti di tipo covariante:

11) $g_{\mu v} \begin{bmatrix} d\mu^\mu \\ dv^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\mu_\mu \\ dv_v \end{bmatrix}$

segue:

12) $g_{\mu v} = \begin{bmatrix} 1 & cos\alpha \\ cos\alpha & 1 \end{bmatrix}$

dalla seconda equazione della 9) risulta:

$dv_v - d\mu^\mu cos\alpha = dv^v$

sostituisco nella prima equazione della 9) dv^v e risulta:

$d\mu_\mu - d\mu^\mu = (dv_v - d\mu^\mu cos\alpha)cos\alpha$ $d\mu_\mu - d\mu^\mu = dv_v cos\alpha - d\mu^\mu cos^2\alpha$ $d\mu_\mu - dv_v cos\alpha = d\mu^\mu - d\mu^\mu cos^2\alpha$ $d\mu_\mu - dv_v cos\alpha = d\mu^\mu(1 - cos^2\alpha)$ $d\mu_\mu - dv_v cos\alpha = d\mu^\mu sin^2\alpha$

e ottengo la relazione:

13) $\frac{1}{sin^2\alpha}(d\mu_\mu - dv_v cos\alpha) = d\mu^\mu$

in maniera del tutto analoga dalla prima equazione della 9) risulta:

$d\mu^\mu = d\mu_{mu} - dv^v cos\alpha$

sostituisco nella seconda equazione della 9) $d\mu^\mu$ e risulta:

$dv_v - dv^v = (d\mu_\mu - dv^v cos\alpha)\ cos\alpha$ $dv_v - dv^v = d\mu_\mu cos\alpha - dv^v cos^2\alpha - d\mu_\mu cos\alpha + dv_v = dv^v - dv^v cos^2\alpha - d\mu_\mu cos\alpha + dv_v = dv^v(1 - cos^2\alpha) - d\mu_\mu cos\alpha + dv_v = dv^v sin^2\alpha$

ed ottengo la relazione:

14) $\frac{1}{sin^2\alpha}(-d\mu_\mu cos\alpha + dv_v) = dv^v$

ricomponendo insieme le relazioni 13) e 14) mi risulta:

15) $\begin{cases} \frac{1}{sin^2\alpha}(d\mu_\mu - dv_v cos\alpha) = d\mu^\mu \\ \frac{1}{sin^2\alpha}(-d\mu_\mu cos\alpha + dv_v) = dv^v \end{cases}$

ossia devo applicare una matrice di trasformazione controvariante per passare da un vettore con componenti covarianti ad uno con componenti controvarianti:

16) $g^{\mu v}\begin{bmatrix} d\mu_\mu \\ dv_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\mu^\mu \\ dv^v \end{bmatrix}$

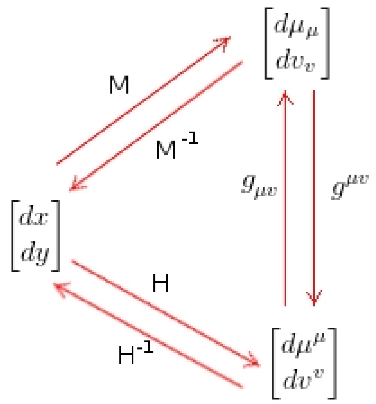
quindi

17) $g^{\mu v} = \dfrac{1}{sin^2\alpha}\begin{bmatrix} 1 & -cos\alpha \\ -cos\alpha & 1 \end{bmatrix}$

questa matrice che esprime la legge di trasformazione dalle coordinate covarianti a quelle controvarianti a fronte di una distanza invariante tra oggetto P e osservatore 0 è il tensore metrico controvariante

$$g^{\mu v} = \begin{bmatrix} \frac{1}{sin^2\alpha} & \frac{-cos\alpha}{sin^2\alpha} \\ \frac{-cos\alpha}{sin^2\alpha} & \frac{1}{sin^2\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{bmatrix}$$

riepilogo quindi con uno schema più chiaro le relazioni intercorrenti tra le varie matrici di trasformazione dirette e inverse:



ossia dalla 4) e la 16) ottengo che:

$$H\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = g^{\mu v}\begin{bmatrix} d\mu_\mu \\ dv_v \end{bmatrix}$$

da cui relazionando quest'ultima equazione membro a membro con la 7) ho

$HM^{-1} = g^{\mu v}$

inoltre come si vede dal grafico 3):

$(g^{\mu v})^{-1} = (g_{\mu v})$ oppure $(g_{\mu v})^{-1} = (g^{\mu v})$

cioè il prodotto tra una trasformazione ottenuta con il tensore metrico covariante ed il tensore metrico controvariante è una matrice di identità metrica nello spazio bidimensionale considerato.

$$g^{\mu v}\ g_{\mu v} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tale identità poteva essere generalmente dedotta da un caso particolare cioè quando le componenti covarianti sono uguali a quelle controvarianti in pratica quando l'angolo $\alpha = 90°$

quindi dalle equazione 12) e 17) risulta:

$$g_{\mu v} = \begin{bmatrix} 1 & cos90 \\ cos90 & 1 \end{bmatrix} = g^{\mu v} = \frac{1}{sin^2 90} \begin{bmatrix} 1 & -cos90 \\ -cos90 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

L'identità o invarianza metrica nel piano euclideo corrisponde quindi ad una trasformazione lineare covariante e alla relativa antitrasformazione controvariante che restituisce alla fine la distanza stessa

L'oggetto osservato, ossia la distanza $ds^2 = dx^2 + dy^2$, è sempre la stessa sia se che si usano sistemi di coordinate covarianti che sistemi di coordinate controvarianti

deduco quindi se si dovesse ragionare in 3 dimensioni nel piano cartesiano la distanza

$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

sarebbe rappresentabile simmetricamente con il tensore metrico g :

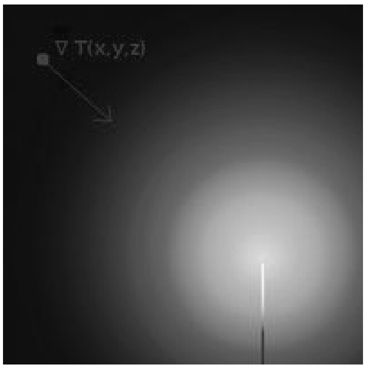
$$g_{\mu v} = g^{\mu v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{xx} & g_{xy} & g_{xz} \\ g_{yx} & g_{yy} & g_{yz} \\ g_{zx} & g_{zy} & g_{zz} \end{bmatrix}$$

ossia come una matrice di trasformazione che fornisce l'identità delle singole componenti di un qualsiasi punto dello spazio euclideo e quindi conseguentemente anche l'identità dell'intero spazio in cui si è immersi

Lo stesso ragionamento quindi si può fare su sistemi di riferimento a *più dimensioni* e più complessi *"preservando questa simmetria dello spazio di tipo euclideo"*.

Si parla di tensore metrico quando l'oggetto invariante è immerso in uno spazio metrico e le relative leggi di trasformazione riguardano le componenti connesse alla distanza. Come è facile intuire ci sono però vari tipi di tensori proprio in funzione del campo e delle relative grandezze che si prendono in considerazione. Per tale ragione i tensori sono gli strumenti fisico-matematici per comprendere le leggi dei campi.

Faccio un esempio per essere più chiaro:



uno scalare è un numero che potrebbe esprimere ad esempio semplicemente una grandezza come la temperatura in un punto preciso dello spazio, un insieme di scalari costituiscono un vettore: ad esempio il gradiente della temperatura ∇T , è un oggetto matematico che ci dice localmente ,attraverso un vettore, quale sia la direzione , il verso in cui si trova la sorgente termica e la sua intensità. In questo tipo di campo il gradiente termico fornisce l'informazione di quanto rapidamente varia la temperatura in funzione di un certo spazio. Esso è cioè un tensore di tipo covariante: tanto varia lo spazio nella direzione, nel verso e nella distanza e tanto egualmente varia il gradiente nella direzione , nel verso e nell'intensità. Mentre la sola posizione differenziale dl in questo campo rappresenta un tensore di tipo controvariante.

Le leggi generali della natura debbono potersi intendere mediante equazioni che valgono per tutti i sistemi di coordinate, cioè che siano covarianti rispetto a qualunque sostituzione (covarianti in modo generale).” La “covarianza”, rispetto a determinate trasformazioni di coordinate, sembrerebbe quindi essere condizione sufficiente perché le equazioni che esprimono le leggi fisiche restino invariate in forma.

Si intuisce ora che la presenza di un oggetto con determinate proprietà fisiche fa quindi acquisire allo spazio circostante delle proprietà fisiche "modificandolo" e questo è praticamente il concetto di campo in fisica (ossia la regione di spazio che delimita fenomeni fisici con certe proprietà), la legge che esprime il campo (indipendentemente dal punto di osservazione cioè una covarianza generale) è il tensore covariante , per questo i tensori covarianti servono a studiare i campi e a generalizzarne le leggi fisiche. Le interazioni tra oggetti immersi nel campo si possono quindi spiegare come delle perturbazioni del campo stesso ossia come azioni che curvano la sua struttura geometrica.

Tornando al tensore metrico per generalizzare quindi il concetto di distanza di un punto occorre coinvolgere sia la metrica covariante che la metrica controvariante:

l'equazione 1) che esprime la distanza nella metrica cartesiana con il teorema di Pitagora può essere riscritta come:

1A) $ds^2 = dx\ dx + dy\ dy$

ricordando che dx dalla prima equazione della 6) equivale a $d\mu_\mu$ ma equivale anche dalla prima equazione della 3) a

$d\mu^\mu + \frac{dy}{tan\alpha}$

e ricordando che dy dalla seconda equazione della 6) equivale a: $\frac{dv_v}{sin\alpha} - \frac{dx\ cos\alpha}{sin\alpha} = \frac{dv_v}{sin\alpha} - \frac{dx}{tan\alpha}$ ed equivale dalla seconda equazione della 3) anche a $dv^v sin\alpha$

posso riscrivere l'equazione 1a) come:

1B) $ds^2 = d\mu_\mu(d\mu^\mu + \frac{dy}{tan\alpha}) + (\frac{dv_v}{sin\alpha} - \frac{dx}{tan\alpha})dv^v sin\alpha$

segue:

1C) $ds^2 = d\mu_\mu d\mu^\mu + \frac{dy\ d\mu_\mu}{tan\alpha} + dv_v dv^v - dx\ dv^v\ cos\alpha$

il termine $\frac{dy\ d\mu_\mu}{tan\alpha}$ nella 1c) può essere scritto come $\frac{dy\ dx}{tan\alpha}$ in quanto $dx = d\mu_\mu$

nella seconda equazione della 3) $dv^v = \frac{dy}{sin\alpha}$ quindi il termine $-dx\ dv^v\ cos\alpha$ nella 1C) può essere riscritto come

$-dx\ \frac{dycos\alpha}{sin\alpha} = -dx\ \frac{dy}{tan\alpha}$

quindi la 1c) può essere espressa come :

1D) $ds^2 = d\mu_\mu d\mu^\mu + \frac{dy\ dx}{tan\alpha} + dv_v dv^v - \frac{dy\ dx}{tan\alpha}$

si arriva così ad una importante riformulazione della distanza qualunque sia l'inclinazione degli assi di riferimento ossia:

1E) $ds^2 = d\mu_\mu d\mu^\mu + dv_v dv^v$

come è facilmente osservabile questa equazione ha espresso implicitamente anche il teorema di Pitagora della 1) e lo generalizza perchè nel caso particolare in cui gli assi μ e v sono fra loro perpendicolari $dx = d\mu_\mu = d\mu^\mu$ e $dy = dv_v = dv^v$ ottengo di nuovo $ds^2 = dx^2 + dy^2$

l'espressione quadratica della distanza 1e) ds^2 potrebbe quindi essere ora correlata con il tensore metrico g

indicando con dX la generica componente sull' X-esimo asse di riferimento l'equazione 1e) può essere riscritta in forma più generale come

1F) $ds^2 = dX_\mu dX^\mu + dX_v dX^v$

in particolare i e j sono le i-esime e j-esime componenti indicate con dX così l'equazione 1F) equivale alla forma più compatta :

1G) $ds^2 = dX_i dX^j$

(il segno di sommatoria viene sottointeso ved. notazione di Einstein (http://it.wikipedia.org/wiki/Notazione_di_Einstein))

oppure può essere scritta nella forma:

1H) $ds^2 = dX^i dX_j$

inoltre con l'equazione 11) posso scrivere:

1I) $g_{ij} dX^i = dX_j$

mentre con l'equazione 16) scrivo:

1L) $g^{ij} dX_j = dX^i$

combinando quindi la 1H) con la 1L) ottengo la relazione tra il tensore metrico controvariante e la distanza ossia l'equazione metrica:

1M) $ds^2 = g^{ij} dX_i dX_j$

esprimibile anche nella seguente forma con il tensore metrico covariante:

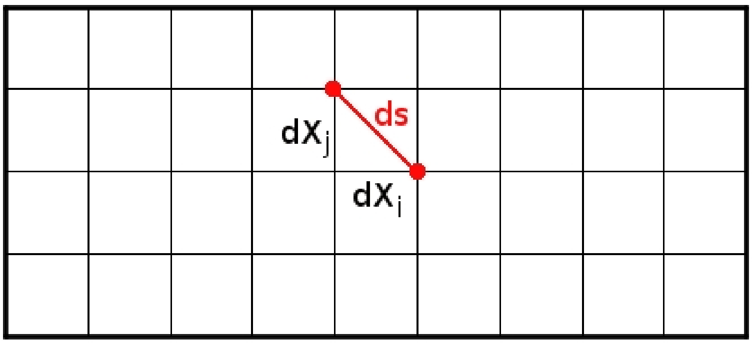
1N) $ds^2 = g_{ij} dX^i dX^j$

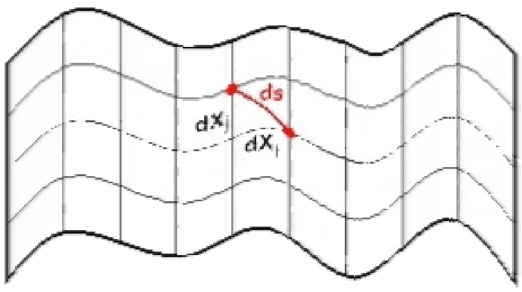
La definizione di tensore metrico si basa quindi su regole di trasformazione delle sue componenti (covarianti o controvarianti che siano) tenendo ben presente che queste trasformazioni possono essere effettuate solo a fronte di una distanza invariante ossia ragionando all'interno di una struttura curvabile con questa proprietà.

L'idea che si può trarre e che il tensore g esprime perciò la proprietà di una struttura geometricamente curvabile di avere i punti del suo reticolo ad una distanza sempre uguale in rapporto alle componenti strutturali stesse:

$g^{ij} = \dfrac{ds^2}{dX_i dX_j}$, (tensore controvariante di ordine 2)

$g_{ij} = \dfrac{ds^2}{dX^i dX^j}$, (tensore covariante di ordine 2)

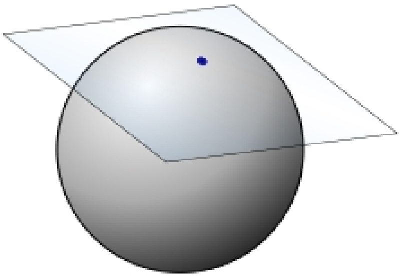


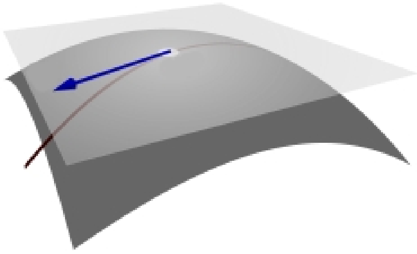


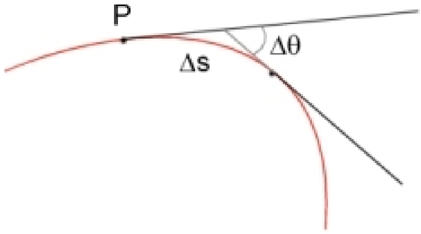
così g generalizza il concetto di invarianza dell'intervallo spaziale ds a tutti i punti di una matrice in rapporto alle relative componenti: indubbiamente un concetto di distanza più vicino al modo di concepire naturalmente un oggetto come insieme di punti, particelle o atomi.

Immaginando tale superficie immersa in un volume o ipervolume curvabile ossia una "varietà topologica di dimensione 3 o superiore" così g "il tensore fondamentale dello spazio" raccoglie e sottoindende numerosi concetti come distanza, angolo, lunghezza di una curva, curvatura ecc.. Per questo con il tensore metrico si parla di geometria intrinseca: ossia è possibile descrivere tutte le proprietà metriche di una varietà intrinsecamente, tramite le sue sole coordinate oblique o piu in generale curvilinee, "dimenticando" che la varietà è immersa in uno spazio euclideo.

Ricordando che la derivata di una funzione rispetto a una componente non è altro che la direzione in cui localmente la funzione rapidamente varia (ossia è la tangente alla curva nel punto) così il tensore metrico indica come la funzione quadratica della distanza rapidamente varia in relazione alle componenti. Questo praticamente può essere interpretato geometricamente come rapidamente cambia il piano tangente rispetto ad una varietà cioè è la definizione di curvatura rispetto a uno spostamento locale in uno spazio.







Note

Che la formula di Eulero anticipasse un pochino le trasformazioni di rotazione qui viste era evidente:

La rotazione del vettore (x,y) nel rispettivo vettore (x',y')

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

$x' = xcos\theta - ysin\theta$

$y' = xsin\theta + ycos\theta$

può essere correlata alla formula di eulero

infatti dato il numero complesso

$z = x + iy$ (ossia il vettore evento e = x + ict)

questo vettore può essere ruotato di un angolo θ moltiplicandolo proprio per $e^{i\theta}$

espandendo il prodotto con la formula di Eulero risulta:

$e^{i\theta}z = (cos\theta + isin\theta)(x + iy) = (xcos\theta + iycos\theta + ixsin\theta - ysin\theta) = (xcos\theta - ysin\theta) + i(xsin\theta + ycos\theta) = x' + iy'$,

ossia

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = e^{i\theta} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

quindi

$$e^{i\theta} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix},$$