Introduzione alla relatività speciale

Da Ciaoidea.

Elementi di relatività speciale

La simmetria è presente in qualsiasi elemento naturale anche tra i più piccoli. Tutto ciò che osserviamo è simmetrico ma, vogliamo cercare una definizione a questa parola. Allo scopo di definire esattamente l' essenza della simmetria, i matematici si interessano non tanto alla forma degli oggetti simmetrici, quanto alle trasformazioni che si possono far loro subire lasciandoli invariati. Ma per semplificare, non si usa parlare di trasformazione di simmetria, ma semplicemente di "simmetria" dell'oggetto.

Che le cose non cambino a seconda del punto di vista effettuando una semplice traslazione ce ne eravamo in effetti accorti con il primo principio della dinamica o principio di inerzia che non è di banale osservazione anzi:

"Se un corpo è fermo rimane fermo, mentre se un corpo è in movimento rettilineo uniforme e non sono presenti attriti ossia forze esterne significative continuerà a moversi con la stessa velocità, la stessa direzione e lo stesso verso".

Un sistema inerziale è quindi un sistema che in condizioni di assenza di forze significative agenti su di esso risulterà invariante nel suo stato (cioè nel suo insieme) sia che ci si muova di moto rettilineo uniforme o sia che si stia fermi.

Incredibilmente per un sistema inerziale non vi è quindi differenza alcuna tra quiete e movimento. Esiste praticamente una simmetria rispetto al movimento anche nel caso particolare in cui la velocità è nulla. Non esistono così sistemi di riferimento preferenziali: ciò che si osserva in moto o da fermi è praticamente sempre la stessa identica cosa.

Le leggi della natura sono perciò sempre le stesse in tutti i sistemi inerziali sia che ci si muova uniformemente nella velocità, nella direzione e nel verso o che si stia praticamente fermi!

Non esistendo quindi sistemi preferenziali nell'osservazione se ne deduce che non esiste il moto assoluto ma solo il moto relativo.

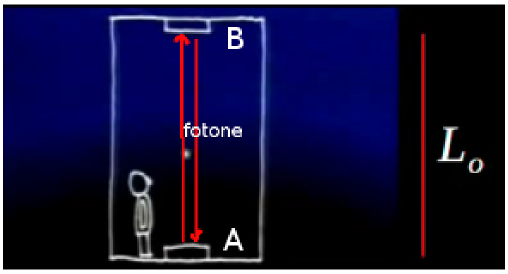
Posti due osservatori nel vuoto dello spazio risulterebbe per loro molto difficile in assenza di altri punti di riferimento al di fuori di loro stessi dire che si stia davvero muovendo o chi sia davvero fermo.

La prima grandezza fisica che prendiamo in considerazione che risulta invariante al moto dei sistemi inerziali è la velocità della luce.

Indicando con c la velocità della luce pari approssimativamente a 300.000 km/s deduciamo che essa dovrebbe essere sempre la stessa in "qualunque" sistema inerziale in moto o in quiete.

Immaginiamo di eseguire mentalmente un esperimento, "Gedankexperiment" in tedesco, in cui noi siamo dentro il vagone di un treno facendo rimbalzare un fascio di luce, ossia dei fotoni a velocità c, tra il soffitto ed il pavimento utlizzando degli specchi distanti tra loro L_o. Praticamente un orologio un pò particolare che scandisce il tempo utilizzando i fotoni.

Secondo un osservatore interno del vagone (solidale ad esso) si vedrebbe un fotone andare dal punto A al punto B con velocità c come in figura:



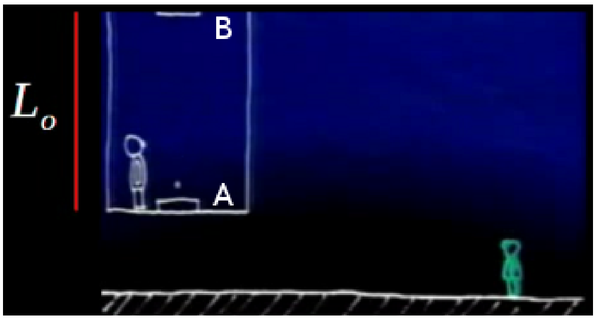
il fotone impiega un tempo t_o per andare e tornare nel punto A dato dalla somma del tempo in andata t_{AB} e del tempo di ritorno t_{BA}

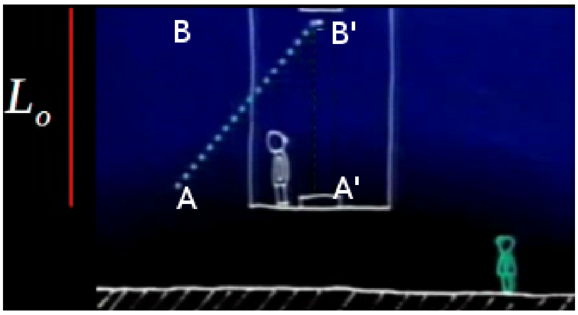
1) $t_o = t_{AB} + t_{BA} = \frac{L_o}{c} + \frac{L_o}{c} = \frac{2L_o}{c}$

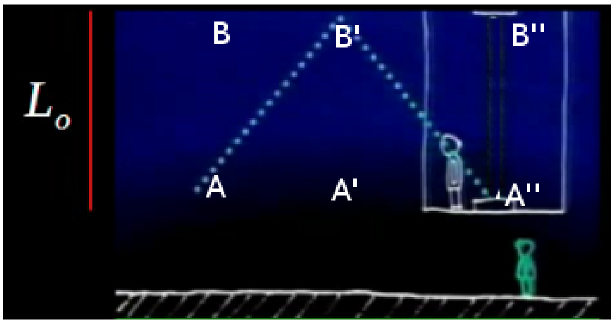
quindi la distanza fra i due specchi risulta essere

2) $L_o = \frac{ct_o}{2}$

Secondo un osservatore esterno al vagone in movimento invece si vedrebbe il fotone con velocita c compiere un percorso A -> B' -> A *di lunghezza evidentemente maggiore di AB*







secondo l'osservatore a terra il tempo impiegato dal fotone per andare e tornare nello stesso punto dello specchio corrisponderebbe a :

3) $t = t_{AB'} + t_{B'A''} = \frac{L}{c} + \frac{L}{c} = \frac{2L}{c}$

quindi la distanza fra i due specchi risulta essere

4) $L = \frac{ct}{2}$

se v è la velocità di traslazione del vagone, lo spazio da esso percorso nel tempo t che è necessario al fotone per partire e tornare nello stesso punto dello specchio risulta:

$$AA'' = vt = AA' + A'A'' = \frac{vt}{2} + \frac{vt}{2}$$

unendo idealmente i punti A' A *B' otteniamo un triangolo rettangolo nel quale per il teorema di pitagora vale la relazione:*

$(A''B')^2 = (A'A'')^2 + (A'B')^2$

$$(\frac{ct}{2})^2 = (\frac{vt}{2})^2 + (\frac{ct_o}{2})^2$$

relazioniamo tra loro i tempi t e t_o

$$(ct)^2 - (vt)^2 = c^2 t_o^2$$

$$t^2(c^2 - v^2) = c^2 t_o^2$$

$$t^2 c^2 (1 - \frac{v^2}{c^2}) = c^2 t_o^2$$

$$t^2 (1 - \frac{v^2}{c^2}) = t_o^2$$

$$t^2 = \frac{t_o^2}{(1-\frac{v^2}{c^2})}$$

la relazione fra il tempo dell'osservatore in quiete e dell'osservatore in moto è quindi:

5) $$t = \frac{t_o}{\sqrt{(1-\frac{v^2}{c^2})}}$$

indicando con $\gamma = \frac{1}{\sqrt{(1-\frac{v^2}{c^2})}}$ l'equazione 5) può essere scritta semplicemente come:

6) $t = t_o\gamma$

t_o detto anche "tempo proprio" è il tempo misurato dall'osservatore interno nel vagone fermo rispetto all'orologio a fotoni.

t detto anche "tempo improprio" è il tempo misurato dall'osservatore esterno al vagone non fermo rispetto all'orologio a fotoni.

Analizziamo ora le relazioni dei tempi t e t_o dei due osservatori in funzione della velocità del vagone:

se la velocità v è molto bassa ossia molto più piccola di c segue che $\lim_{v \to 0} \gamma = 1$ e quindi $t \simeq t_o$

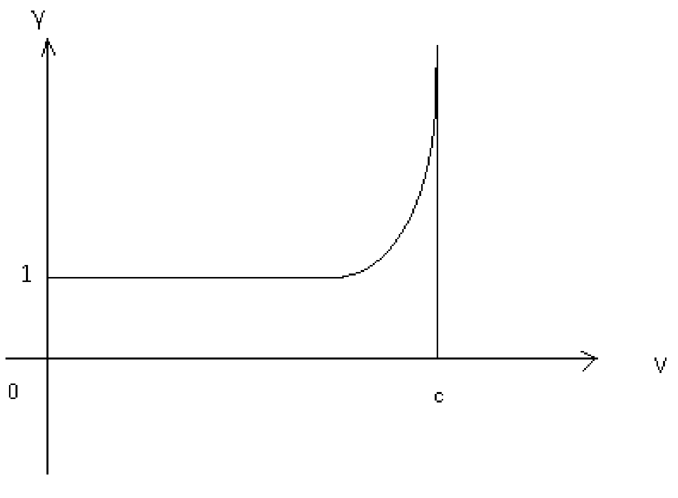
si ha quindi simultaneità nelle due osservazioni fuori e dentro il vagone

se la velocità è molto alta ossia molto vicina a c segue che $\lim_{v \to c} \gamma = 0$ quindi $t \simeq \infty$

ossia i fenomeni osservati a terra risultano avere durata molto grande mentre i fenomeni osservati nel vagone risultano avere durata molto breve:

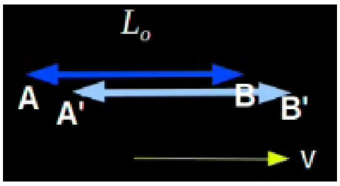
$$t_o \simeq 0$$

Non si ha perciò più simultaneità nelle due osservazioni ed un breve istante dentro il vagone sembrerebbe interminabile ad un osservatore esterno



il fattore γ che relaziona i tempi di osservazione subisce a velocità prossime a quelle della luce una grande dilatazione come se la velocità della luce fosse un limite fisico. Attraverso tale fattore si intuisce inoltre che il tempo non può essere inteso come una grandezza fisica assoluta ma è da considerarsi come relativa al sistema di osservazione.

Fino ad ora abbiamo preso in considerazione un orologio in cui i fotoni eseguivano una scansione del tempo verticalmente alla direzione di moto del vagone. Ora prendiamo in considerazione un orologio che effettua la scansione del tempo lungo la stessa direzione di moto del vagone.



Per un osservatore interno al vagone il fotone parte da A rimbalza in B e torna di nuovo in A coprendo la distanza L_o , mentre per un osservatore esterno il percorso diventa AB'A' quindi il tempo totale di rimbalzo del fotone è:

$$t = t_{AB'} + t_{B'A'} = \frac{L}{(c+v)} + \frac{L}{(c-v)} = \frac{L(c-v+c+v)}{(c^2-v^2)} = \frac{2Lc}{(c^2-v^2)} = \frac{2Lc\frac{1}{c^2}}{(c^2-v^2)\frac{1}{c^2}} = \frac{\frac{2L}{c}}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{2L}{c}\gamma^2$$

quindi ricapitolando nell'orologio verticale abbiamo per l'equazione 2) e l'equazione 6) una relazione tra tempo e spazio come segue:

7) $t = \frac{2L_o}{c}\gamma$

mentre nell'orologio orizzontale abbiamo la relazione tra tempo e spazio come segue:

8) $t = \frac{2L}{c}\gamma^2$

eguagliando quindi l'equazione 7) e 8):

$$\frac{2L_o}{c}\gamma = \frac{2L}{c}\gamma^2$$

otteniamo la relazione tra le lunghezze osservate fuori e dentro il vagone:

9) $L = \frac{1}{\gamma}L_o$

essendo il fattore $0 \leq \frac{1}{\gamma} \leq 1$ se ne deduce quindi che l'osservatore esterno al vagone osserva rispetto a quello interno una contrazione della lunghezza dell'orologio di luce lungo la direzione di moto.

L_o viene definita "lunghezza propria" che è quindi la lunghezza dell'orologio di luce misurata da un osservatore in quiete rispetto ad esso

L viene definita "lunghezza impropria" che è quindi la lunghezza dell'orologio di luce misurata da un osservatore in moto rispetto ad esso

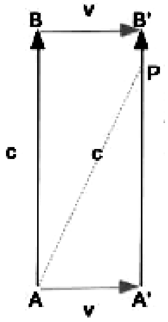
Ma come si può interpretare praticamente γ ? Quando si osserva un oggetto da diversi punti di vista le sue "proprietà" come lunghezza, larghezza e profondità variano, lo si può vedere di profilo oppure di sopra e le dimensioni prospettiche saranno ogni volta diverse ma rimane sempre quell'oggetto. Alla stessa identica maniera osservando il nostro orologio di luce da dentro il vagone o da fuori il vagone ne percepiamo il tempo di oscillazione e la sua lunghezza sostanzialmente come delle "proprietà" variabili in funzione del punto di osservazione ma rimane sempre quel regolo di luce e γ sembra esprimere in pratica una prospettiva nell'osservazione dello spazio e del tempo di un "unico oggetto fisico" che è chiamato "spaziotempo".

dalla 6) risulta: $\gamma = \frac{t}{t_o}$

dalla 9) risulta: $\gamma = \frac{L_o}{L}$

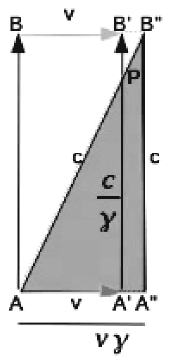
Esiste in poche parole una simmetria tra spazio e tempo: lo spazio è il tempo ed il tempo è lo spazio a seconda del modo in cui l'osservazione viene fatta.

Essendo la velocità della luce il rapporto tra 2 grandezze simmetriche e tra loro equivalenti, ed essendo quindi il suo valore invariante rispetto al sistema di riferimento può essere utilizzata come un vero e proprio strumento di riferimento nelle misurazioni. Immaginando di utilizzare la luce come un vero e proprio regolo nelle misurazioni dello spazio o del tempo possiamo quindi affermare che il valore c è lo spazio percorso dalla luce in 1 secondo o è semplicemente 1 secondo!



Consideriamo un regolo AB di lunghezza pari a 1 secondo luce o semplicemente c , per un osservatore a terra esso trasla in un secondo orizzontalmente di uno spazio v ed il fotone secondo lui percorre lo spazio AP=c, mentre per un osservatore solidale al regolo il fotone percorre lo spazio A'P che come visto prima con il teorema di Pitagora risulta:

$$A'P = \frac{c}{\gamma}$$



quando il fotone arriva nel punto B *per l'osservatore ad esso solidale nel moto è passato 1 secondo ed osserviamo che si formano i triangoli APA' e AB*A *che sono tra loro simili e vale la relazione:*

A'P:*A"B"* = *AA'*:*AA"*

$$\frac{c}{\gamma} : c = v : AA''$$

cioè otteniamo:

$AA'' = v\gamma$

e si puo dedurre anche che:

$AB'' = c\gamma$

PROSPETTIVA DEGLI EVENTI RELATIVA ALL'OSSERVAZIONE IN MOTO	PROSPETTIVA DEGLI EVENTI RELATIVA ALL'OSSERVAZIONE IN QUIETE
a parere di un osservatore non solidale al regolo durante 1 secondo il fotone copre lo spazio AP=c e l'orologio (o regolo) si sposta di uno spazio AA'=v	a parere di un osservatore solidale al regolo durante 1 secondo luce pari ad A*B* il regolo trasla di una distanza γ volte maggiore rispetto all'osservatore in moto pari a $v\gamma$

Chi ha dunque ragione di fronte a questa discordanza ? evidentemente tutti e due ! è solo una questione di punti di vista, il fattore γ esprime una prospettiva delle proprietà spaziali o temporali osservate!

i due osservatori osservano spazi e tempi diversi e quindi anche velocità diverse ! Ma ricordando che la quantità di moto del nostro regolo è data dal prodotto della sua massa per la sua velocità se ne dedurrebbe che a seconda del punto di vista spaziale/temporale anche la quantità di moto sarebbe diversa!

Ma che ne sarebbe del principio di conservazione della quantità di moto, dell'impulso e quindi della stessa energia ?

secondo la prospettiva 1) dell'osservatore in quiete rispetto all'orologio: tale orologio e quindi anche i suoi fotoni possiedono un momento o una quantità di moto pari a $m_o v$ (essendo m_o la massa dell'orologio misurata da tale osservatore)

secondo la prospettiva 2) dell'osservatore in moto rispetto all'orologio: tale orologio e quindi anche i suoi fotoni possiedono una quantità di moto γ volte superiore pari a $mv\gamma$ (essendo m la massa dell'orologio misurata da tale osservatore)

Per il principio della conservazione della quantità di moto i due momenti devono essere fra loro uguali:

$mv = m_o v\gamma$

ossia semplificando v in entrambi i membri dell'equazione

10) $m = \dfrac{m_o}{\sqrt{(1 - \frac{v^2}{c^2})}}$

la massa dell'orologio sembra quindi subire un incremento mano a mano che aumenta la velocità! Incredibile ! Vediamo ora quindi di capire da dove arriva questa massa in eccesso! e per farlo partiamo dal secondo principio della dinamica e dal teorema dell'impulso secondo il quale la variazione di quantità di moto equivale all'impulso:

$Fdt = dP$

$$F = \frac{dP}{dt}$$

$$F = \frac{d(mv)}{dt}$$

11) $F = \dfrac{(v\ dm\ +\ m\ dv)}{dt}$

Calcoliamo il lavoro o l'energia cinetica prodotta nello spostamento infinitesimo dx:

$$dW = F\ dx$$

sostituendo quindi F con la 11) otteniamo:

$$dW = \frac{(v\ dm\ +\ m\ dv)}{dt}\ dx$$

$$dW = \frac{(v\ dm\ dx + m\ dvdx)}{dt}$$

$$dW = \frac{(v\ dm\ dx)}{dt} + \frac{(m\ dv\ dx)}{dt}$$

$$dW = v\ dm\ \frac{dx}{dt} + m\ dv\ \frac{dx}{dt}$$

ma $\dfrac{dx}{dt}$ non è altro che la definizione di velocità

$$v = \frac{dx}{dt}$$

segue quindi

$$dW = v\ dm\ v + m\ dv\ v$$

12) $dW = v^2\ dm\ +\ mv\ dv$

consideriamo ora finalmente la massa relazionata fra i due sistemi di osservazione dell'equazione 10) eleviamo entrambi i membri al quadrato

$$m^2 = \frac{m_o^2}{(1-\frac{v^2}{c^2})}$$

$$m^2 = \frac{m_o^2}{(\frac{c^2-v^2}{c^2})}$$

$$m^2 = \frac{m_o^2 c^2}{c^2-v^2}$$

$$m^2(c^2-v^2) = m_o{}^2c^2$$

$$m^2c^2 - m^2v^2 = m_o^2c^2$$

differenziamo i membri dell'equazione per capire tale variazione di massa che qui visualizziamo cosa implica:

$$d(m^2c^2 - m^2v^2) = d(m_o^2c^2)$$

$$2m\ dm\ c^2 - (2m\ dmv^2\ +\ m^2\ 2v\ dv) = 0$$

semplificando il termine 2m otteniamo

$$dm\ c^2 - (\ dm\ v^2\ +\ mv\ dv) = 0$$

13) $dm\ c^2 = (\ dm\ v^2\ +\ mv\ dv)$

ma il secondo membro della 13) non è altro che il lavoro infinitesimo prodotto nel piccolo spostamento della massa nell'equazione 12)

$$dm\ c^2 = dW$$

la variazione infinitesima di massa moltiplicata per il quadrato della velocità della luce esprime quindi la variazione infinitesima di lavoro, calcoliamo quindi quanto vale complessivamente la variazione di lavoro nelle due modalità di osservazione (a riposo e in movimento):

$$\int_{m_o}^{m} dm\ c^2 = \int_{W_o}^{W} dW$$

essendo:

W_o ed m_o rispettivamente il lavoro e la massa del regolo secondo l'osservatore in quiete relativa ad esso (osservazione dentro il vagone) W ed m il lavoro e la massa del regolo secondo l'osservatore in moto relativo ad esso (osservazione a terra o fuori il vagone)

ottieniamo quindi

14) $mc^2 - m_oc^2 = W - W_o$

la differenza di energia cinetica o di lavoro nelle due osservazioni in movimento e in quiete è quindi $W - W_o = \Delta E_{cin}$ ed otteniamo:

15) $\Delta E_{cin} = mc^2 - m_oc^2$

16) $\Delta E_{cin} = (m - m_o)c^2$

17) $\Delta E_{cin} = \Delta mc^2$

Questa relazione spiega che variazioni di energia cinetica in un sistema implicano variazioni di massa la quale tende ad aumentare in relazione alla velocità secondo l'equazione 10). Considerando che in un sistema non è possibile stabilire fisicamente se questo è assolutamente fermo se ne può dedurre che qualsiasi oggetto nell'universo è intrinsecamente dotato di moto e quindi anche di energia cinetica anche quando è apparentemente fermo. Quindi l'energia potenziale del sistema a riposo non è altro che :

18) $U_{pot} = W_o = m_o c^2$

quindi l'energia meccanica totale è:

19) $E = W - W_o + U_{pot}$

20) $E = mc^2 - m_o c^2 + m_o c^2$

21) $E = mc^2$

«Dalla teoria della relatività speciale si ricava che massa ed energia sono entrambe differenti manifestazioni della stessa cosa – un concetto non di immediata comprensione per l'uomo della strada. Inoltre, l'equazione E uguale a m moltiplicato per c elevata al quadrato, che significa che l'energia è uguale alla massa moltiplicata per il quadrato della velocità della luce, mostra che piccolissime quantità di massa possono essere trasformate in una immensa quantità di energia e viceversa. La massa e l'energia sono infatti equivalenti, secondo la formula appena citata. Questo è stato dimostrato da Cockroft e Walton nel 1932 in un esperimento».

Massa ed energia sono due aspetti simmetrici della realtà vincolati da un legame di natura elettromagnetica. La rottura di questa simmetria genera l'una o l'altra cosa.