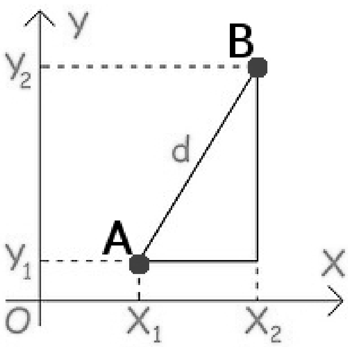
Le trasformazioni di Lorentz

Da Ciaoidea.

Le distanze tra noi e le stelle sono immense ma la luce proveniente da loro ha però una velocità finita, anche se altissima (nel vuoto essa si propaga a circa 300.000 Km al secondo e non esiste nulla di più veloce della luce nel mondo fisico) , la luce che noi vediamo, in un certo istante, provenire da una stella o da una galassia è stata emessa dalla sorgente in un istante precedente, cioè quand'era più "giovane". Per gli oggetti più distanti quindi l'immagine è più "profonda" dimensionalmente parlando e funziona da "macchina del tempo", permettendoci di guardare indietro nel tempo.

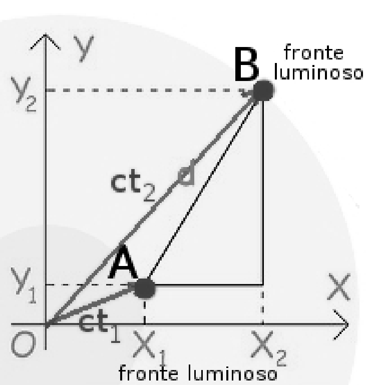
Proviamo ad idealizzare il concetto di distanza d fra 2 punti A e B nel sistema cartesiano a 2 dimensioni XY può essere espressa in forma esplicita in funzione delle relative coordinate mediante il teorema di Pitagora nel seguente modo:



1) $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

indicando con c la velocità della luce potremmo immaginare che la distanza d possa essere coperta da un raggio di luce in un intervallo di tempo $t_2 - t_1$

2) $d = c(t_2 - t_1)$



L'equazione 1) può essere scritta come:

3) $c^2(t_2 - t_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

oppure in forma implicita:

3) $c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 = 0$

esprimendo gli intervalli delle varie coordinate come dei delta posso quindi scrivere:

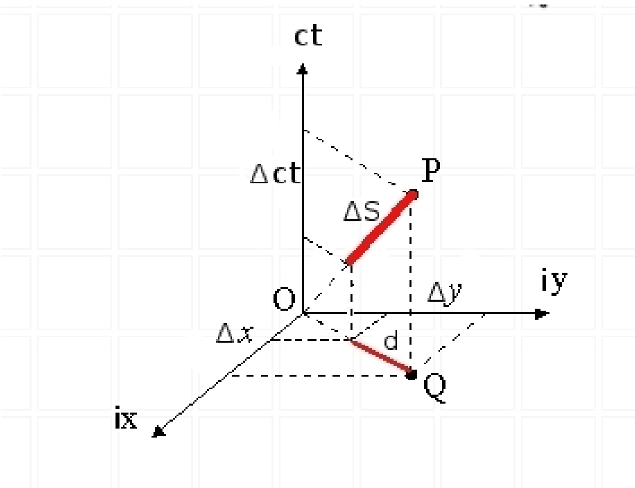
4) $c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 = 0$

dal punto di vista geometrico osservo che il primo membro dell'equazione 4) può essere pensato come una distanza Δs in un sistema di riferimento tridimensionale X, Y, cT in cui gli asse X, Y hanno valori immaginari giustificando il segno negativo nel quadrato della 4):

5) $c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 = \Delta s^2$

ossia è riportabile alla forma pitagorica:

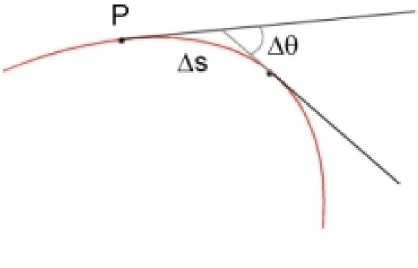
$c^2\Delta t^2 + (i\Delta x)^2 + (i\Delta y)^2 = \Delta s^2$



ora osservo che dalla 4) l'intervallo Δs^2 è zero in un piano cioè proprio in una superficie che non ha curvatura ossia ha curvatura zero. Quindi sembra esserci un legame tra l'intervallo Δs^2 e la curvatura intrinseca del campo (varietà) in cui si è immersi.

Se pensiamo ad una generica linea immersa in un piano, la curvatura è intuitivamente la misura di quanto essa rapidamente varia rispetto alla tangente. Inoltre ci accorgiamo immediatamente che si tratta di una proprietà locale e non globale. Quindi sembrerebbe dipendere dal punto di riferimento o di osservazione.

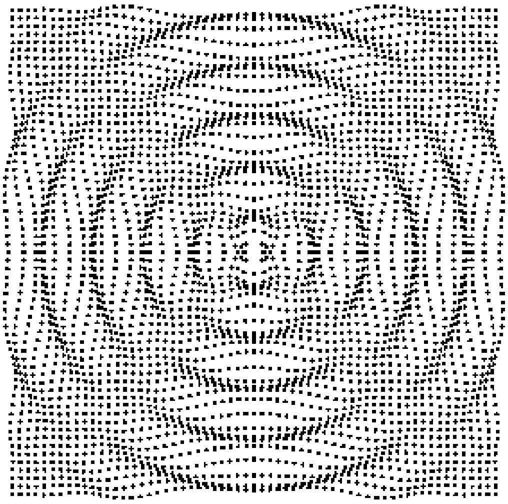
$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \Theta}{\Delta S} = \frac{\partial \Theta}{\partial S}$$



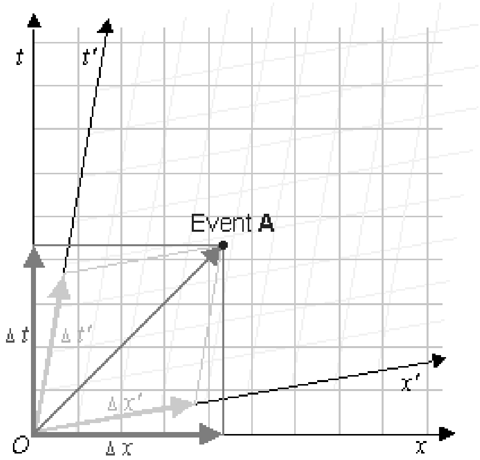
Ma il vuoto ossia lo spaziotempo è davvero una struttura curvabile? di cosa si sta parlando con il termine vuoto ?

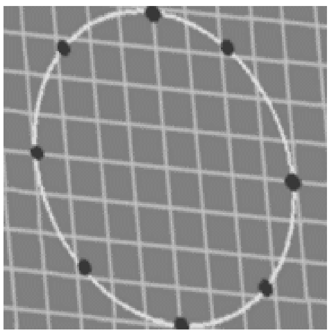
Il vuoto in realtà non è vuoto. In qualunque parte dell'universo esso pullula di microscopiche particelle, fotoni, neutrini, e addirittura di particelle pesanti dotate cioè di massa. Esso è quindi concepibile come un fluido ,un oceano di particelle mediatrici di forze, di massa ed energia, nel quale tutto è immerso ed in cui si propagano delle onde.

Cosi come ad esempio nell'aria le molecole si comprimono con un fronte d'onda sonora, così nel vuoto è possibile osservare delle compressioni delle componenti spaziali e temporali con delle onde di spazio-tempo (onde gravitazionali). Quindi essendo il vuoto il mezzo attraverso il quale si propagano le onde si deduce che esso debba possedere una struttura di tipo elastico: se un'onda di luce è in grado di viaggiare per miliardi di chilometri senza fermarsi attraverso di esso significa che il vuoto possiede una enorme inerzia e quindi una enorme energia.



Si intuisce quindi che spazio e tempo non sono grandezze necessariamente perpendicolari fra loro ma possono essere oblique ed avere un angolo di curvatura locale, dipendente dalla prospettiva di osservazione nello spaziotempo





Gli effetti della curvatura di una superficie possono essere misurati calcolando la somma degli angoli interni di un triangolo:

nel piano è sempre 180°

$\alpha + \beta + \gamma = 180$

quindi

$(\alpha + \beta + \gamma) - 180 = 0$

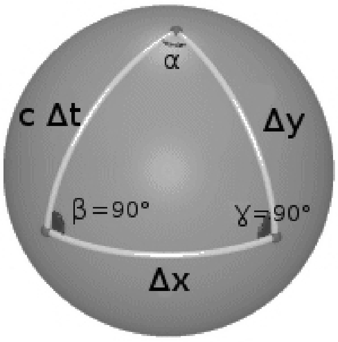
ponendo la quantità

$(\alpha + \beta + \gamma) - 180 = \Delta\psi$

quindi su un piano cioè a curvatura zero risulta:

$\Delta\psi = 0$

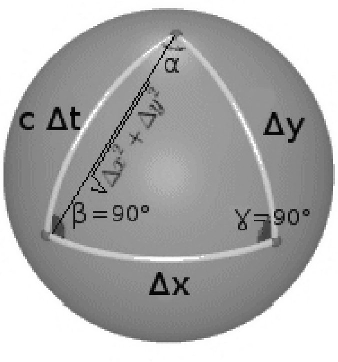
ma su una sfera in realtà è maggiore di zero



$(\alpha + \beta + \gamma) - (180) = \Delta\psi > 0$

perchè questo ?

angoli e lati di un triangolo sono fra loro in proporzione quindi questo discorso che relaziona angoli e curvatura in un triangolo può essere trasposto nella relazione tra lati e curvatura



con un piccolo sforzo di immaginazione quello che si può intuire e che mentre il teorema di pitagora con la quantità $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ rappresenta idealmente l'ipotenusa e quindi la congiungente lineare dei vertici del triangolo in figura, la luce segue la curvatura della superficie e svela praticamente una struttura curva dell'universo coprendo il percorso $c\Delta t$ in un tempo più lungo di quello atteso nel percorso lineare

$(c\Delta t)^2 > (\Delta x^2 + \Delta y^2)$

in particolare noto che la congiungente $\Delta x^2 + \Delta y^2$ è interna alla struttura sferica

segue:

$(c\Delta t)^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2) > 0$

ossia

$\Delta s^2 > 0$

deduco cioè che una sfera ha **curvatura positiva**

cioè i 2 punti o eventi lungo la superficie hanno un **eccesso** di lunghezza rispetto al loro ideale collegamento lineare quindi Δs oltre ad esprimere una distanza fra eventi sembra poter esprimere intrinsecamente una curvatura.

L'equazione 5) infatti ottenuta partendo da sole considerazioni su un sistema di riferimento a 2 dimensioni XY può essere estesa e generalizzata ad uno spazio tridimensionale con l'introduzione dell'asse Z nella forma:

6) $c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = \Delta s^2$

o scritta anche nella forma differenziale:

7) $c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = ds^2$

per poi ritrovare la forma pitagorica corrispondente con gli assi spaziali immaginari:

8) $(cdt)^2 + (idx)^2 + (idy)^2 + (idz)^2 = ds^2$

ds esprime con questa ultima equazione la distanza tra punti molto vicini individuati secondo un osservatore con coordinate spaziali xyz e una coordinata temporale ct (strettamente connessa alla velocita della luce): questi punti prendono il nome di eventi (o quadrivettori)

9) $\vec{e} = \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

essi sono immersi in una struttura quadridimensionale chiamata spazio-tempo e la loro distanza ds o intervallo prende il nome di quadrintervallo ed esprime in un sol colpo oltrecchè una separazione spaziale e temporale anche il livello di curvatura della struttura in cui si è immersi

se dovessi rapportare l'intervallo ds fra 2 eventi con la distanza lineare percorsa dalla luce che li collega e li fa "parlare" otterrei praticamente un valore γ che relaziona la distanza solo alla prima componente ct del quadrivettore come se si guardasse l' "oggetto quadrintervallo" da una sola prospettiva piuttosto che nel suo insieme ottenendo quindi un valore di curvatura relativa della varietà spaziotempo.

L'aberrazione nell'osservazione della distanza nasce quindi proprio nel modo in cui essa si rapporta "solo" ad una coordinata del quadrivettore creando questo strano effetto prospettivo nello spaziotempo

$$\gamma = \frac{ds}{ct} = \frac{\sqrt{(cdt)^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)}}{cdt}$$

segue:

$$\gamma = \sqrt{\frac{(cdt)^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)}{(cdt)^2}},$$

$$\gamma = \sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{(cdt)^2}},$$

$$\gamma = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2})},$$

$$\gamma = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2})},$$

indicando le componenti spaziali della velocità dell'osservatore come:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}$$

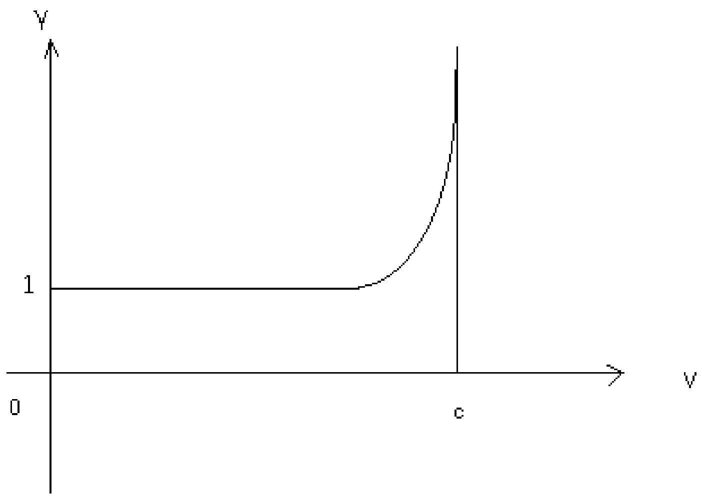
risulta:

$$\gamma = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)},$$

$$\gamma = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)},$$

$$\gamma = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

essendo la velocità un modo di relazionare lo spazio al tempo ossia una prospettiva di osservazione nello spaziotempo ecco come il fattore gamma di Lorentz esprime la conseguente deformazione o aberrazione:



la distanza ds è indipendentemente dalla prospettiva spaziale e temporale ed è quindi la stessa per ogni osservatore quindi per un osservatore O' l'equazione 7) risulta:

10) $c^2dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 = ds^2$

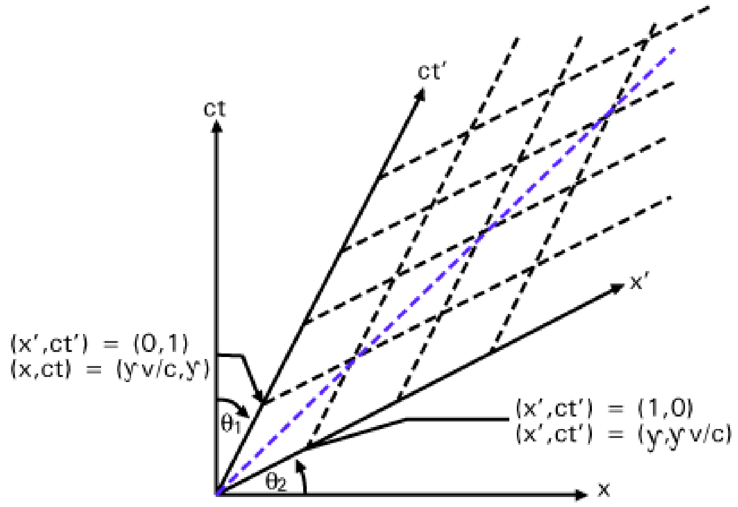
ossia il quadrintervallo misurato da O è uguale al quadrintervallo misurato da O'

11) $c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2$

ciò che osserva un osservatore O' ed un osservatore O per quanto misurato in istanti e spazi diversi ha la medesima distanza spazio-temporale esattamente come quando si osserva un oggetto da diverse prospettive o da diversi punti di osservazione ds è quindi un oggetto matematicamente invariante noto come "invariante di Lorentz".

Il tensore metrico (ved. appunti) è un oggetto matematico che descrive perfettamente questa invarianza indipendemente dalla trasformazione del sistema di coordinate covariante o controvariante che sia. Conseguentemente l'equazione 7) può essere scritta in forma matriciale

12) $g_{ij} = g^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$,



la trasformazione da coordinate perpendicolari in coordinate oblique fa intuire che siamo di fronte ad un osservazione ruotata in profondità del piano x,ct che va a coinvolgere anche le coordinate spaziali y e z. Le coordinate sembrano proprio mescolarsi.

Ragioniamo quindi in questo modo:

visto l'alto numero di componenti e la relativa complessità di calcolo si può quindi iniziare da un caso un pochino più semplice considerando una sola coordinata spaziale con eventi distanti solo lungo l'asse x e l'asse temporale ct

L'equazione 7) si riduce quindi alla forma:

15) $c^2dt^2 - dx^2 = ds^2$

16) dy = dz = 0

in pratica considero una condizione di moto relativo solo lungo le x fra i 2 sistemi di osservazione

integrando la 15) su tutto lo spaziotempo di intervallo infinito risulta

17) $\int (c^2dt^2 - dx^2) = \int ds^2$

18) $c^2 \int dt^2 - \int dx^2 = \int ds^2$

19) $c^2t^2 - x^2 = s^2$

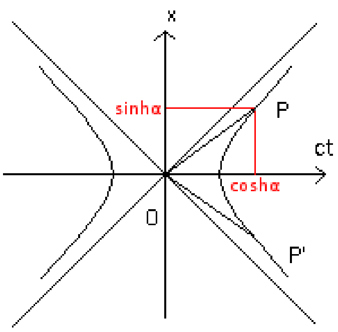
o nella forma pitagorica sul piano complesso:

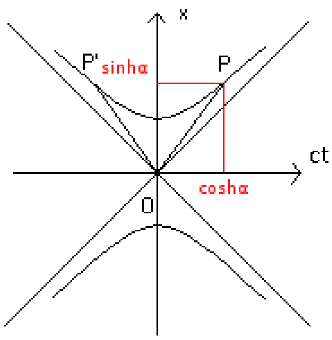
20) $(ct)^2 + (ix)^2 = s^2$

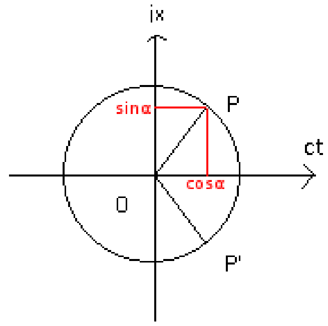
L' equazione 19) rappresenta analiticamente una iperbole equilatera (se $s^2>0$ ha concavità destra e sinistra, se $s^2<0$ ha concavità verso l'alto e il basso) che interseca gli assi nei punti +s e -s mentre l'equazione 20) immaginaria corrispondente rappresenta una circonferenza di raggio s.

Se si considera la direzione di propagazione della luce rispetto al punto di osservazione O lungo l'asse x , essa si propaga lungo 2 versi simultaneamente ossia in verso concorde alle x ma anche in verso opposto alle x quindi la funzione s della distanza di un evento ha andamento corrispondente ai 2 rami di iperbole

L'iperbole svolge quindi sul piano iperbolico reale un ruolo curiosamente analogo a quello della circonferenza sul piano complesso entrambe esprimono una distanza pari a s !







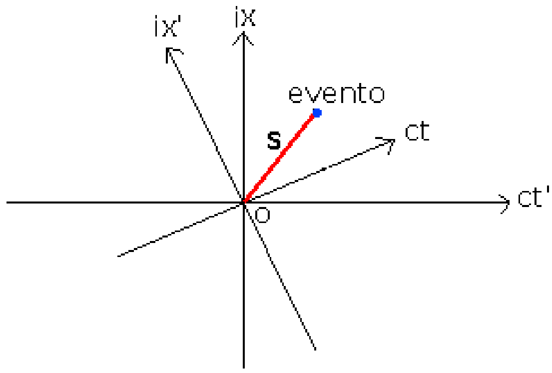
Quindi muovendosi lungo una direzione da qui all'infinito nello spazio o nel tempo lo spaziotempo ossia l'universo avrebbe una evoluzione di tipo iperbolico a curvatura negativa o anche sferica a curvatura positiva con un raggio di espansione pari ad s.

Ora se dovessi considerare un mio punto di osservazione su un sistema cartesiano bidimesionale come questo con assi ix, ct quali potrebbero essere teoricamente i movimenti che potrei eseguire affinchè resti invariata la distanza tra me e l'oggetto osservato ? che trasformazione devo fare eseguire al mio punto di vista affinchè la distanza resti la stessa e si abbia così l'invarianza di Lorentz ?

una rotazione!

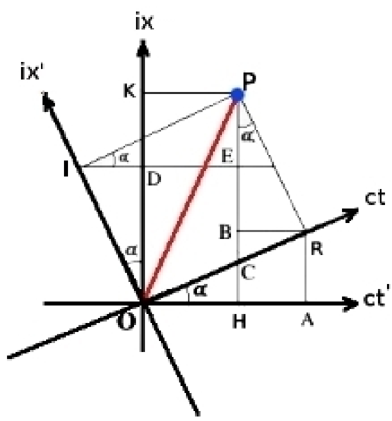
praticamente una rotazione intorno al punto di osservazione nel tempo e nello spazio!

come si vede dal grafico s la distanza rimane così sempre la stessa tra il punto di osservazione O e l'evento osservato applicando la rotazione.



Ecco la trasformazione nel dettaglio:

l'evento P con coordinate (ct,ix) con la rotazione di un angolo α nel nuovo sistema ha coordinate (ct',ix')



$$\overline{OH} = ct'$$

$$\overline{OK} = ix'$$

$$\overline{OR} = ct$$

$$\overline{OI} = ix$$

Considerando il triangolo rettangolo OAR risulta

$$\overline{OA} = \overline{OR}cos\alpha = ctcos\alpha$$

$$\overline{AH} = \overline{BR} = \overline{PR}sin\alpha = ixsin\alpha$$

$$\overline{OH} = ct' = \overline{OA} - \overline{AH} = ctcos\alpha - ixsin\alpha$$

Considerando il triangolo rettangolo ODI risulta

$$\overline{OD} = \overline{OI}cos\alpha = ixcos\alpha$$

Ora considero il triangolo rettangolo PEI essendo $\overline{PE} = \overline{KD}$ $\overline{KD} = \overline{PE} = \overline{PI}sin\alpha = ctsin\alpha$

$$\overline{OK} = ix' = \overline{KD} + \overline{OD} = ctsin\alpha + ixcos\alpha$$

riassumendo quindi:

21a) $ct' = ctcos\alpha - ixsin\alpha$

22a) $ix' = ctsin\alpha + ixcos\alpha$

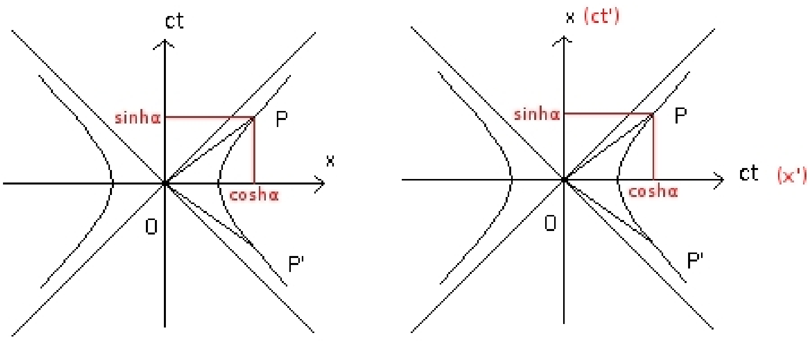
Queste equazioni trasformano una circonferenza in se stessa (rendono invariata la distanza s^2)

Mi dovrei trovare quindi con equazioni di trasformazione molto simili per avere l'invarianza di s^2 rappresentabile altresì con una iperbole equilatera , questa deve trasformarsi praticamente in se stessa

Gli asintoti dell'iperbole equilatera sono le rette bisettrici dei quadranti cartesiani note come **coni di luce**

$$ct = \pm x$$

quindi risulta abbastanza intuitivo che l'iperbole per rimanere uguale nel grafico dovrebbe subire una trasformazione in cui le ordinate si sostituiscono alle ascisse e le ascisse alle ordinate: in poche parole si interscambiano le coordinate del tempo a quelle dello spazio nell'evento P (!)



la trasformazione in termini matriciali risulta quindi

$$\begin{bmatrix} x \\ ct \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cosh\alpha & sinh\alpha \\ sinh\alpha & cosh\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \end{bmatrix}$$

ossia rapportando in generale due punti di osservazione O ed O' ottengo:

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cosh\alpha & sinh\alpha \\ sinh\alpha & cosh\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \end{bmatrix}$$

quindi:

21b) $ct' = ct\cosh\alpha + x\sinh\alpha$

22b) $x' = ct\sinh\alpha + x\cosh\alpha$

trasformazioni molto simili alla 21a) e 22a)

Le coordinate spaziali e temporali sembrano quindi praticamente mescolarsi con una simile trasformazione del punto di osservazione e sembrano essere una cosa sola!

Applico quindi le trasformazioni 21b) e 22b) ottenute alla 19) per **verificare la validità** : in poche parole la distanza spaziotemporale s deve rimane invariata ruotando il punto di osservazione nel tempo e nello spazio

ecco quindi sviluppando i calcoli cosa succede:

$c^2t'^2 - x'^2 = (ct\cosh\alpha + x\sinh\alpha)^2 - (ct\sinh\alpha + x\cosh\alpha)^2$,

$$c^2t'^2 - x'^2 = c^2t^2\cosh^2\alpha + x^2\sinh^2\alpha + 2xct\sinh\alpha\cosh\alpha - c^2t^2\sinh^2\alpha - x^2\cosh^2\alpha - 2xct\sinh\alpha\cosh\alpha$$
,

$c^2t'^2 - x'^2 = c^2t^2\cosh^2\alpha + x^2\sinh^2\alpha - c^2t^2\sinh^2\alpha - x^2\cosh^2\alpha$,

$c^2t'^2 - x'^2 = c^2t^2(\cosh^2\alpha - \sinh^2\alpha) - x^2(\cosh^2\alpha - \sinh^2\alpha)$,

$c^2t'^2 - x'^2 = (c^2t^2 - x^2)(\cosh^2\alpha - \sinh^2\alpha)$,

$c^2t'^2 - x'^2 = c^2t^2 - x^2$,

ossia

$s'^2 = s^2$,

le trasformazioni intuite 21b) e 22b) sono quindi corrette!

se considero in particolare il fronte d'onda a distanza spaziotemporale unitaria s = 1 vediamo cosa succede a queste trasformazioni

22) $c^2t^2 - x^2 = 1$,

23) $c^2t'^2 - x'^2 = 1$,

relaziono all'ascissa dell'iperbole equilatera il relativo coseno iperbolico e all'ordinata il relativo seno iperbolico

24) $ct = \cosh\alpha$,

25) $x = \sinh\alpha$,

sostituendo la 24) e 25) nella 22) risulta

22) $\cosh^2\alpha - \sinh^2\alpha = 1$,

$$1 - \frac{\sinh^2\alpha}{\cosh^2\alpha} = \frac{1}{\cosh^2\alpha},$$

$$1 - tgh^2\alpha = \frac{1}{\cosh^2\alpha},$$

23) $\cosh^2\alpha = \dfrac{1}{1 - tgh^2\alpha}$,

24) $cosh\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1-tgh^2\alpha}},$

sostituendo la 23) nella 22) risulta:

$$\frac{1}{1-tgh^2\alpha} - sinh^2\alpha = 1,$$

segue

$$sinh^2\alpha = \frac{1}{1-tgh^2\alpha} - 1,$$

$$sinh^2\alpha = \frac{1-(1-tgh^2\alpha)}{1-tgh^2\alpha},$$

25) $sinh^2\alpha = \dfrac{tgh^2\alpha}{1-tgh^2\alpha},$

26) $sinh\alpha = \dfrac{tgh\alpha}{\sqrt{1-tgh^2\alpha}},$

osservo che la tangente iperbolica equivale a:

27) $tgh\alpha = \dfrac{sinh\alpha}{cosh\alpha} = \dfrac{x}{ct} = \dfrac{v}{c},$

esprimo l'equazione 24) attraverso la relazione 27) della velocità dell'osservatore, ed in maniera del tutto analoga esprimo la 25) attraverso la 27) ottenendo i valori di coseno e seno iperbolico

$$\begin{cases} 28) cosh\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ 29) sinh\alpha = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

sostituisco queste espressioni alle trasformazioni di rotazione spaziotemporale della 21b) e della 22b) e risulta

$$30)\ \begin{cases} ct' = ct\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + x\frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ x' = ct\frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + x\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

$$31)\ \begin{cases} ct' = \gamma ct + \frac{v}{c}\gamma x \\ x' = \frac{v}{c}\gamma ct + \gamma x \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

32) $$\begin{cases} ct' = \gamma ct + \frac{v}{c}\gamma x + 0y + 0z \\ x' = \frac{v}{c}\gamma ct + \gamma x + 0y + 0z \\ y' = 0ct + 0x + y + 0z \\ z' = 0ct + 0x + 0y + z \end{cases}$$

quindi riportando tutto in forma matriciale il sistema di equazioni 32) risulta:

33) $$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 \\ \frac{v}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

essendo Λ la matrice di trasformazione di Lorentz spaziotemporale da O ad O' 4x4 lungo la sola direzione x (x-boost):

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & \frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 \\ \frac{v}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ed essendo Λ^{-1} la relativa matrice di trasformazione inversa da O' ad O:

$$\Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} \gamma & -\frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 \\ -\frac{v}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

indicando con

$$\beta = \frac{v}{c}$$

il rapporto tra la velocità di moto all'interno dello spaziotempo e la sua velocità limite strutturale possiamo quindi scrivere:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

E' possibile osservare che le trasformazioni della 32) studiate per semplicità con la velocità v lungo la sola direzione all'asse delle x *S* risultano quindi

$$\begin{cases} t' = \gamma\left(t + \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}}{c^2}\right) \\ \mathbf{x}' = \gamma(\mathbf{x} + \mathbf{v}t) \end{cases}, \begin{cases} t = \gamma\left(t' - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}}{c^2}\right) \\ \mathbf{x} = \gamma(\mathbf{x}' - \mathbf{v}t) \end{cases}$$

e queste equazioni sono incredibilmente simili alle trasformazioni di Galileo: di nuovo c'è γ che esprime la "dilatazione" delle componenti nella struttura spaziotempo e il fattore β che esprime quanto si è vicini alla velocità della sua massima deformazione strutturale

$$\begin{cases} t' = \gamma \left(t + \beta \frac{\mathbf{x}}{c}\right) \\ \mathbf{x}' = \gamma(\mathbf{x} + \mathbf{v}t) \end{cases}, \begin{cases} t = \gamma \left(t' - \beta \frac{\mathbf{x}}{c}\right) \\ \mathbf{x} = \gamma(\mathbf{x}' - \mathbf{v}t) \end{cases}$$

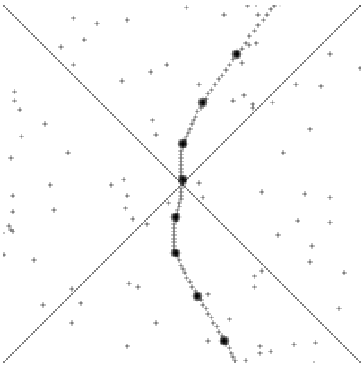
quindi in forma più generale posso scrivere con la direttrice generica $\vec{r}$

$$\begin{cases} t' = \gamma \left(t + \beta \frac{\tilde{\mathbf{r}}}{c}\right) \\ \tilde{\mathbf{r}}' = \gamma(\tilde{\mathbf{r}} + \tilde{\mathbf{v}}t) \end{cases}, \begin{cases} t = \gamma \left(t' - \beta \frac{\tilde{\mathbf{r}}}{c}\right) \\ \tilde{\mathbf{r}} = \gamma(\tilde{\mathbf{r}}' - \tilde{\mathbf{v}}t) \end{cases},$$

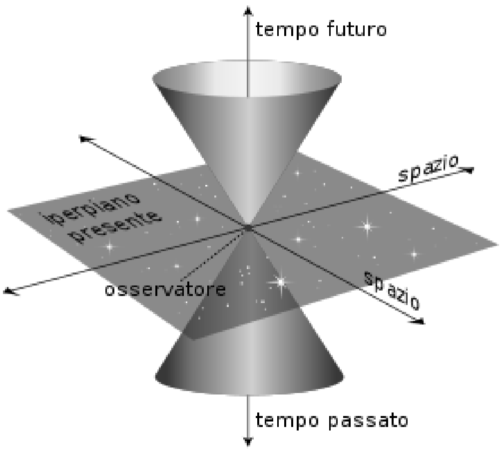
queste trasformazioni possono essere quindi riassunte tutte in forma più compatta attraverso il tensore metrico come:

$\Lambda\Lambda^{-1} = g_{ij} = g^{ij}$

la matrice di trasformazione di Lorentz e la relativa antitrasformazione descrivono il tensore metrico ossia l'oggetto invariante spaziotempo.



Vista dello spazio-tempo lungo una linea di universo (sequenza di eventi) con boost lungo le x. I piccoli punti sono specifici eventi nello spazio-tempo (ad esempio stelle nell'universo).



Versione tridimensionale dello spaziotempo di Minkowski

Estratto da http://ciaoidea.it/alessandrorizzo