L' identità di Eulero

Da Ciaoidea.

Consideriamo l'equazione

1) $x^2 = -1$

non esiste nessun numero reale che elevato al quadrato restituisca -1, in quanto il quadrato di un numero reale è un numero positivo oppure nullo. Le soluzioni sono

$$x = \pm\sqrt{-1}$$

essendo $\sqrt{-1}$ un' entità matematica non reale o immaginaria indicata con la lettera i

$$i = \sqrt{-1}$$

quindi le soluzioni dell'equazione 1) sono

$$x = \pm i$$

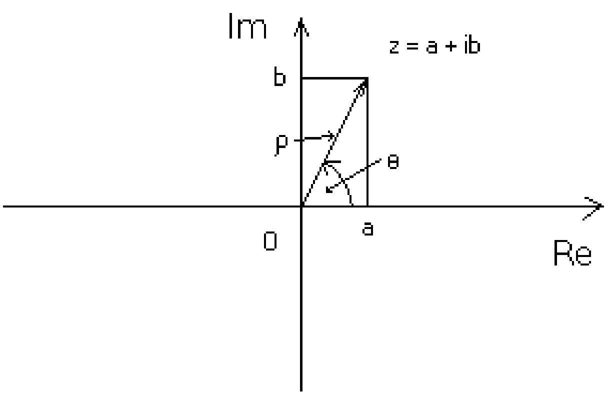
ossia

$i^2 = 1$

se ne deduce quindi che i numeri reali si ottengono da operazioni con numeri immaginari (in questo caso il quadrato dell'unità immaginaria) quindi l'insieme dei numeri reali R non può che essere un sottoinsieme di un insieme ancora più vasto costituito da numeri reali e da numeri immaginari: tale insieme è quello dei numeri complessi C

$$R \subset C$$

Possiamo definire quindi un numero complesso z come un vettore costituito da una coppia di valori: uno reale (a) e ed uno immaginario (ib) rappresentabile nel Piano di Gauss:



essendo:

$$z \in C$$

$$a, b \in R$$

$z = a + ib$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \rho$$

θ è l'angolo formato tra il vettore z e l'asse reale e valgono quindi le relazioni:

$a = \rho cos\theta$

$b = i\rho sin\theta$

segue :

2) $z = \rho(cos\theta + isin\theta)$

deriviamo ora z rispetto a θ per vedere come tale vettore rapidamente varia in funzione di questo angolo:

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\rho(cos\theta + isin\theta)$$

ipotizzando ρ costante risulta:

$$\frac{dz}{d\theta} = \rho(-sin\theta + icos\theta)$$

$dz = \rho(- sin\theta + icos\theta)d\theta$

$dz = \rho i(isin\theta + cos\theta)d\theta$

ma ricordando la definizione di z nella 2) risulta:

$dz = izd\theta$

$$\frac{1}{z}dz = id\theta$$

sommiamo attraverso un processo di integrazione tutte le microvariazioni di z rispetto a θ:

$$\int \frac{1}{z}dz = \int id\theta$$

$logz = i\theta$

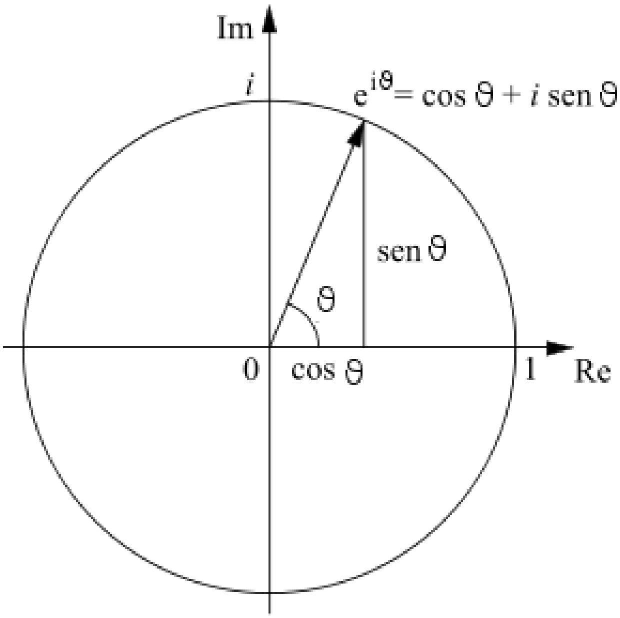
$z = e^{i\theta}$

per la 2) risulta:

$\rho(cos\theta + isin\theta) = e^{i\theta}$

se $\rho = 1$ otteniamo la formula di Eulero

$$e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta$$



se $\theta = \pi$ otteniamo

$$e^{i\pi} = -1$$

questo risultato è facilmente comprensibile: quando l'angolo θ corrisponde a 180° la punta del vettore complesso coincide nella direzione ma con verso opposto all'asse reale (ved. segno negativo) e con modulo 1

da qui segue la famosa identità di Eulero:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

L'equazione, elegante e concisa, racchiude ben 5 entità fondamentali della matematica:

- il numero di Nepero o Eulero: *e* - la costante π - il numero immaginario *i* - il numero naturale 1 - il numero naturale 0

La bellezza della matematica risiede nella pluralità delle possibili connessione che un risultato riesce ad evocare. La formula di Eulero mostra una profonda relazione fra le funzioni trigonometriche e la funzione esponenziale complessa. (L'identità di Eulero è un caso particolare della formula di Eulero). Ora visto che i numeri complessi sono un insieme molto più grande dei numeri reali e visto che attraverso questi ultimi è possibile descrivere i fenomeni fisici naturali possiamo concludere che i numeri complessi possono essere utili a descrivere la fisica dei fenomeni in modo più generale e matematicamente più compatto.