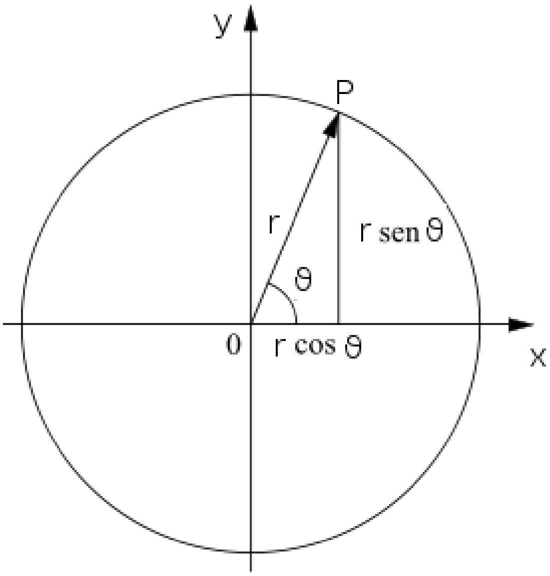
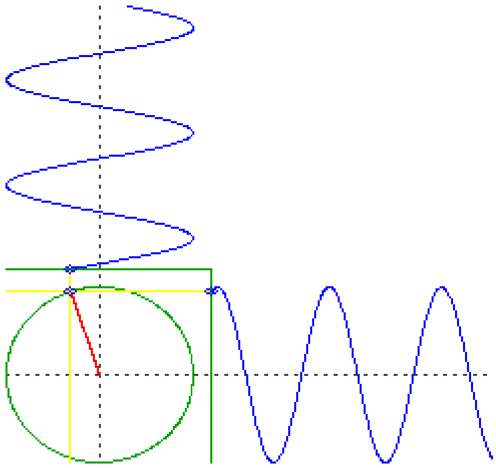
L'equazione di Schrödinger

Da Ciaoidea.

introduzione alla meccanica quantistica: la dualità onda-particella

Il moto circolare uniforme di un punto P(x,y) può essere scomposto in 2 moti di tipo sinusoidale:



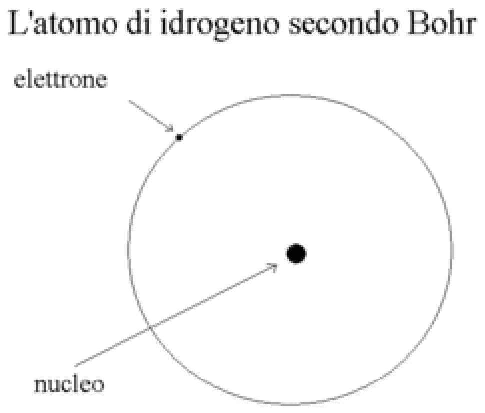


la posizione del punto può quindi espressa attraverso il raggio vettore r in relazione all'angolo che esso forma con l'asse x:

$$x = rcos\theta$$

$$y = rsin\theta$$

ovvero tale moto è intendibile come una forma d'onda complessa, un'onda evidentemente stazionaria che da appunto l'idea di un oggetto stazionario come un'orbita come quella di un elettrone attorno al nucleo in un atomo di idrogeno.

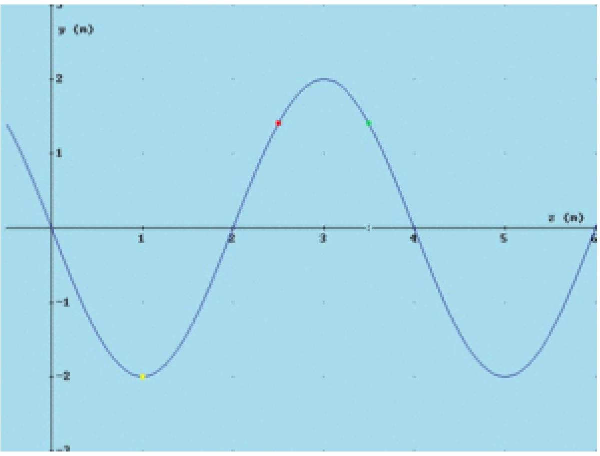


L'elettrone non cade nel nucleo perdendo energia perchè il suo moto è il risultato di un'onda stazionaria complessa costituita da 2 onde sinusoidali:

$$\psi = x + iy$$

$$\psi = r cos\theta + i r sin\theta$$

posso inoltre esprimere genericamente l'angolo θ di tali funzioni in relazione alla velocità angolare ω , al tempo ma anche fase iniziale ϕ_o che determina una traslazione della sinusoide e l'ampiezza d'onda iniziale:



$$\theta = \phi_o - \omega t$$

la fase iniziale è esprimibile in forma generale parametrizzando le x con k:

$$\phi_o = kx$$

ovvero $\theta = kx - \omega t$

l'equazione d'onda complessa risulta quindi:

$$\psi = r cos(kx - \omega t) + i r sin(kx - \omega t)$$

dalla (Formula di Eulero (http://ciaoidea.it/L%27_identit%C3%A0_di_Eulero)) risulta che:

$$\psi = e^{i\theta}$$

$$\psi = e^{i(kx-\omega t)}$$

differenziando l'equazione d'onda rispetto alla componente spaziale x risulta:

$$\frac{d\psi}{dx} = ike^{i(kx-\omega t)}$$

ovvero in forma più compatta risulta:

$$\frac{d\psi}{dx} = ik\psi$$

differenziando ulteriormente l'equazione d'onda rispetto alla componente spaziale x risulta:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = (ik)^2\psi$$

Ora la cosa interessante che qui osserviamo è che gli oggetti , le orbite e le stesse particelle in natura non sono altro che delle composizioni d'onda in forma complessa:

combinando infatti l' equazione dell'energia di Einstein (http://ciaoidea.it/Introduzione_alla_relativit%C3%A0_speciale) :

$$E = mc^2$$

con quella dell'energia a pacchetti di Planck

$$E = h\nu$$

risulta:

$$mc^2 = h\nu$$

essendo il momento del fotone $p = mc$ risulta

$$pc = h\nu$$

ovvero risulta :

$$p = \frac{h\nu}{c}$$

la lunghezza d'onda è data da $\lambda = \frac{c}{\nu}$

segue quindi l'equazione di De Broglie

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

ovvero ad ogni particella in moto (dotata di un momento di moto) è associata una radiazione di lunghezza d'onda λ che avvalora l'ipotesi della natura ondulatoria delle particelle

la fase d'onda è determinata dal rapporto del periodo di questa con la relativa lunghezza d'onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \to k = \frac{p}{\hbar}$$

$$p = \frac{hk}{2\pi} = \hbar k$$

segue:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = (i\frac{p}{\hbar})^2\psi$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2}\psi$$

$$-\hbar^2\frac{d^2\psi}{dx^2} = p^2\psi$$

ricordando che l'energia totale è:

$$E = E_{cin} + E_{pot}$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + E_{pot}$$

e ricordando che la quantità di moto è pari a $p = mv$

posso scrivere $E_{cin} = \dfrac{p^2}{2m}$

da cui segue:

$$E = \frac{p^2}{2m} + E_{pot}$$

da cui moltiplicando membro a membro per ψ risulta:

$$E\psi = \frac{p^2}{2m}\psi + E_{pot}\psi$$

$$E\psi = \frac{-\hbar^2\frac{d^2\psi}{dx^2}}{2m} + E_{pot}\psi$$

ottengo l'equazione di Schrodinger indipendente dal tempo

$$E\psi = \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + E_{pot}\psi$$

Se volessimo esprimere tale equazione anche in funzione del tempo scriveremo:

$$\psi = e^{i(kx-\omega t)}$$

differenziando risulta:

$$\frac{d\psi}{dt} = i\omega\psi$$

$$E = \hbar\omega = h\nu$$

$$E\psi = \hbar\omega\psi$$

$$\frac{E\psi}{\hbar} = \omega\psi$$

$$\frac{-iE\psi}{\hbar} = -i\omega\psi$$

$$\frac{-iE\psi}{\hbar} = \frac{d\psi}{dt}$$

$$E\psi = \frac{d\psi}{dt}\frac{\hbar}{-i}$$

$$E\psi = \frac{d\psi}{dt}\hbar i$$

segue l'equazione d'onda di Schrödinger

$$\frac{d\psi}{dt}\hbar i = \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + E_{pot}\psi$$

tale relazione esprime sinteticamente come nell'atomo di idrogeno massa ed energia sono funzioni di variazioni dello spazio e del tempo in forma differenziale d'equazione d'onda.